§ 9. Спин

Тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ можно использовать для определения углового момента и спина. Рассмотрим изолированную систему, для которой *полный* тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} T^{\beta\gamma} = 0.$$

Можно с помощью тензора T построить другой тензор

$$M^{\alpha\beta\gamma} \equiv x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}. \tag{2.9.1}$$

Поскольку T симметричен и сохраняется, M будет также сохраняться:

$$\frac{\partial M^{\gamma\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.9.2}$$

Построим теперь *полный угловой момент*:

$$J^{\alpha\beta} = \int d^3x M^{0\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}. \tag{2.9.3}$$

Следуя аргументам, приведенным в предыдущем параграфе, мы найдем из (2.9.2), что $J^{\alpha\beta}$ является тензором, сохраняющимся во времени. Заметим далее, что

$$J^{ij} = \int d^3x \,(x^i T^{j0} - x^j T^{i0}),$$

и, так как T^{j0} есть плотность j-й компоненты импульса, можно рассматривать J^{23}, J^{31} и J^{12} как 1-ю, 2-ю и 3-ю компоненты углового момента. Другие компоненты $J^{\alpha\beta}$ выглядят следующим образом:

$$J^{0i} = tp^i - \int x^i T^{00}\, d^3x.$$

Эти компоненты не имеют явного физического смысла, и фактически их можно исключить, фиксируя при $t = 0$ начало координат в «центре энергии», т. е. полагая, что при $t = 0$ момент $\int x^i T^{00}\, d^3x$ равен нулю. Хотя относительно однородных преобразований Лоренца $x^\alpha \to \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$ полный угловой момент является тензором, при трансляциях $x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$ он ведет себя необычно. Действительно, из (2.9.3) и (2.8.13) следует, что

$$J^{\alpha\beta} \to J'^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} + a^\alpha p^\beta - a^\beta p^\alpha. \tag{2.9.4}$$

Такое преобразование возникает, конечно, из-за того, что $J^{\alpha\beta}$ содержит орбитальный угловой момент, задаваемый всегда относительно центра вращения. Для того чтобы выделить в $J^{\alpha\beta}$ *внутреннюю* часть, удобно следующим образом *определить 4-вектор спина*:

$$S_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}U^\delta, \tag{2.9.5}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричный тензор, введенный в § 5, а $U^\alpha \equiv p^\alpha/(-p_\beta p^\beta)^{1/2}$ есть 4-вектор скорости системы. Из-за антисимметричности $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ трансляция $x^\alpha \to x^\alpha + a^\alpha$, изменяющая $J^{\beta\gamma}$ по правилу (2.9.4), оставляет S_α *неизменным*. Кроме того, S_α с очевидностью является вектором и для свободных частиц сохраняется

$$\frac{dS_\alpha}{dt} = 0. \tag{2.9.6}$$

В заключение отметим, что в системе центра масс частиц имеем $U^i = 0$ и $U^0 = 1$, а потому в этой системе

$$S_1 = J^{23}, \qquad S_2 = J^{31}, \qquad S_3 = J^{12}, \qquad S_0 = 0. \tag{2.9.7}$$

Это дает нам право рассматривать S_α как внутренний угловой момент системы. Если даже скорость $\mathbf{U}$ отлична от нуля, S_α имеет в действительности только три независимые компоненты, так как (2.9.5) дает

$$U^\alpha S_\alpha = 0. \tag{2.9.8}$$

Эти свойства S_α мы используем позже при обсуждении прецессии гироскопа в свободном падении.

§ 10. Релятивистская гидродинамика

Многие физические системы, включая, вероятно, саму Вселенную, можно рассматривать приближенно как *идеальную несжимаемую жидкость*. Идеальная жидкость имеет в каждой точке какую-то скорость $\mathbf{v}$, причем по определению наблюдатель, движущийся с этой скоростью, воспринимает жидкость как изотропную. Это осуществляется в том случае, когда средняя длина свободного пробега частиц между столкновениями меньше линейного масштаба используемого наблюдателем. (Например, звуковые волны распространяются в воздухе, если их длина волны велика по сравнению со средней длиной свободного пробега. Однако при очень коротких длинах волн важную роль начинает играть вязкость. и воздух уже нельзя считать идеальной средой.) Сформулируем приведенное выше определение идеальной жидкости с помощью тензора энергии-импульса.

Предположим, что вначале мы находимся в такой системе отсчета (будем отмечать ее знаком «тильда»), в которой рассмат-