тельно центра вращения. Для того чтобы выделить в $J^{\alpha\beta}$ *внутреннюю* часть, удобно следующим образом *определить 4-вектор спина*:

$$S_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}U^\delta, \tag{2.9.5}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричный тензор, введенный в § 5, а $U^\alpha \equiv p^\alpha/(-p_\beta p^\beta)^{1/2}$ есть 4-вектор скорости системы. Из-за антисимметричности $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ трансляция $x^\alpha \to x^\alpha + a^\alpha$, изменяющая $J^{\beta\gamma}$ по правилу (2.9.4), оставляет S_α *неизменным*. Кроме того, S_α с очевидностью является вектором и для свободных частиц сохраняется

$$\frac{dS_\alpha}{dt} = 0. \tag{2.9.6}$$

В заключение отметим, что в системе центра масс частиц имеем $U^i = 0$ и $U^0 = 1$, а потому в этой системе

$$S_1 = J^{23}, \qquad S_2 = J^{31}, \qquad S_3 = J^{12}, \qquad S_0 = 0. \tag{2.9.7}$$

Это дает нам право рассматривать S_α как внутренний угловой момент системы. Если даже скорость **U** отлична от нуля, S_α имеет в действительности только три независимые компоненты, так как (2.9.5) дает

$$U^\alpha S_\alpha = 0. \tag{2.9.8}$$

Эти свойства S_α мы используем позже при обсуждении прецессии гироскопа в свободном падении.

§ 10. Релятивистская гидродинамика

Многие физические системы, включая, вероятно, саму Вселенную, можно рассматривать приближенно как *идеальную несжимаемую жидкость*. Идеальная жидкость имеет в каждой точке какую-то скорость **v**, причем по определению наблюдатель, движущийся с этой скоростью, воспринимает жидкость как изотропную. Это осуществляется в том случае, когда средняя длина свободного пробега частиц между столкновениями меньше линейного масштаба используемого наблюдателем. (Например, звуковые волны распространяются в воздухе, если их длина волны велика по сравнению со средней длиной свободного пробега. Однако при очень коротких длинах волн важную роль начинает играть вязкость, и воздух уже нельзя считать идеальной средой.) Сформулируем приведенное выше определение идеальной жидкости с помощью тензора энергии-импульса.

Предположим, что вначале мы находимся в такой системе отсчета (будем отмечать ее знаком «тильда»), в которой рассмат-

риваемая жидкость покоится в какой-то заданной области пространства и времени. Из описанных свойств идеальной жидкости следует, что в этой пространственно-временной области тензор энергии-импульса имеет сферически симметричный вид:

$$\tilde{T}^{ij} = p\delta_{ij}, \tag{2.10.1}$$

$$\tilde{T}^{i0} = T^{0i} = 0, \tag{2.10.2}$$

$$\tilde{T}^{00} = \rho. \tag{2.10.3}$$

Коэффициенты p и ρ называются соответственно *давлением* и *плотностью собственной энергии*.

Перейдем теперь в лабораторную систему отсчета и предположим, что в этой системе жидкость движется (в рассматриваемой пространственно-временной точке) со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда связь между сопутствующими координатами $\tilde{x}^\beta$ и координатами лабораторной системы x^α имеет вид

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})\,\tilde{x}^\beta,$$

где $\Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})$ — буст, определенный выражениями (2.1.17) — (2.1.21). Поскольку $T^{\alpha\beta}$ есть тензор, то в лабораторной системе он будет выглядеть так:

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma(\mathbf{v})\,\Lambda^\beta{}_\delta(\mathbf{v})\,\tilde{T}^{\gamma\delta},$$

или, в более явной форме,

$$T^{ij} = p\delta_{ij} + (p+\rho)\frac{v_i v_j}{1-\mathbf{v}^2}, \tag{2.10.4}$$

$$T^{i0} = (p+\rho)\frac{v_i}{1-\mathbf{v}^2}. \tag{2.10.5}$$

$$T^{00} = \frac{(\rho + p\mathbf{v}^2)}{1-\mathbf{v}^2}. \tag{2.10.6}$$

Дабы убедиться в том, что это действительно тензор, заметим, что, объединяя уравнения (2.10.4) — (2.10.6), получаем простое выражение

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)U^\alpha U^\beta, \tag{2.10.7}$$

где U^α есть 4-вектор скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}\mathbf{v}, \\ U^0 &= \frac{dt}{d\tau} = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.10.8}$$

нормированный как обычно:

$$U_\alpha U^\alpha = -1. \tag{2.10.9}$$

Действительно, выражение (2.10.7) легко вывести, заметив, что величина, стоящая справа, есть тензор, равный тензору $T^{\alpha\beta}$ в лоренцевой системе, движущейся вместе с жидкостью, а следовательно, равный $T^{\alpha\beta}$ во всех лоренцевых системах.

Кроме энергии и импульса, жидкость будет в общем случае переносить одну или даже несколько сохраняющихся величин, таких, как заряд, число барионов минус число антибарионов и, при обычной температуре, число атомов. Рассмотрим одну из таких сохраняющихся величин и будем называть ее для краткости «числом частиц». Если n — лишь плотность числа частиц (в лоренцевой системе), движущихся в заданной пространственно-временной точке вместе с жидкостью, то в этой системе 4-вектор тока частиц в данной точке задается следующим образом:

$$\tilde{N}^i = 0, \qquad \tilde{N}^0 = n. \tag{2.10.10}$$

В любой другой лоренцевой системе, в которой жидкость в этой точке пространства-времени движется со скоростью $\mathbf{v}$, ток частиц связывается с (2.10.10) бустом $\Lambda(\mathbf{v})$:

$$N^i = \Lambda^i{}_\beta(\mathbf{v})\,\tilde{N}^\beta = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2} v^i n, \tag{2.10.11}$$

$$N^0 = \Lambda^0{}_\beta(\mathbf{v})\,\tilde{N}^\beta = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2} n \tag{2.10.12}$$

или, более компактным образом,

$$N^\alpha = nU^\alpha. \tag{2.10.13}$$

Движение жидкости подчиняется законам сохранения энергии и импульса

$$0 = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(\rho + p)\,U^\alpha U^\beta] \tag{2.10.14}$$

и закону сохранения числа частиц

$$0 = \frac{\partial N^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(nU^\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}\left(n\,(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}\right) + \nabla\cdot\left(n\mathbf{v}\,(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}\right). \tag{2.10.15}$$

Удобно разбить (2.10.14) на трехмерное векторное и скалярное уравнения. Уравнение для трехмерного вектора получается, если положить в (2.10.14) $\alpha = i$, подставить $U^i = v^i U^0$ и использовать (2.10.14) при $\alpha = 0$. Это дает

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{(1-\mathbf{v}^2)}{(\rho+p)}\left[\nabla p + \mathbf{v}\,\frac{\partial p}{\partial t}\right]. \tag{2.10.16}$$

Скалярное уравнение получается при умножении (2.10.14) на U_α. Используя соотношение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(U_\alpha U^\alpha) = 2U_\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{2.10.17}$$

приходим далее к выражению

$$0 = U_\alpha \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = U^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p+\rho) U^\beta].$$

Если же использовать уравнение (2.10.15), то это можно переписать в таком виде:

$$0 = U^\beta \left[\frac{\partial p}{\partial x^\beta} - n \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p+\rho}{n} \right) \right] =$$

$$= -nU^\beta \left[p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\rho}{n} \right) \right]. \qquad (2.10.17a)$$

Второй закон термодинамики утверждает, что давление p, плотность энергии ρ и объем, приходящийся на одну частицу, $1/n$, можно выразить как функции температуры T и энтропии σk, приходящейся на одну частицу, так что

$$kT\, d\sigma = p d \left(\frac{1}{n} \right) + d \left(\frac{\rho}{n} \right). \qquad (2.10.18)$$

(Постоянная Больцмана k введена, чтобы сделать σ безразмерной.) Тогда скалярное уравнение (2.10.17a) можно записать как

$$0 = U^\beta \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} \sim \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \sigma. \qquad (2.10.19)$$

Удельная энтропия поэтому является постоянной во времени в любой точке, перемещающейся вместе с жидкостью. Фундаментальными уравнениями релятивистской гидродинамики являются уравнение непрерывности (2.10.15), уравнения Эйлера (2.10.16), уравнение энергии (2.10.19), а также уравнения состояния, выражающие p и ρ через n и σ.

Чтобы получить некоторое представление о допустимых уравнениях состояний, рассмотрим жидкость, состоящую из бесструктурных точечных частиц, взаимодействующих только посредством пространственно-локализованных столкновений. Как показано в § 8 гл. 2, тензор энергии-импульса можно записать в виде

$$T^{\alpha\beta} = \sum_N \frac{p_N{}^\alpha p_N{}^\beta}{E_N} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) \qquad (2.10.20)$$

[см. выражение (2.8.4)]. В сопутствующей лоренцевой системе $T^{\alpha\beta}$ будет иметь изотропную форму (2.10.1) — (2.10.3), и поэтому давление и плотность энергии задаются в этой системе следующим образом:

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} T^{ii} = \frac{1}{3} \sum_N \frac{\mathbf{p}^2_N}{E_N} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N), \qquad (2.10.21)$$

$$\rho = T^{00} = \sum_N E_N \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N). \qquad (2.10.22)$$

Плотность числа частиц по аналогии с (2.6.2) будет выглядеть так:

$$n = \sum_N \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N). \tag{2.10.23}$$

Отсюда, вообще говоря, следует неравенство

$$0 \leqslant p \leqslant \frac{\rho}{3}. \tag{2.10.24}$$

Для холодного нерелятивистского газа справедливо приближение

$$E_N \approx m + \frac{\mathbf{p}^2{}_N}{2m},$$

и, следовательно, (2.10.22) дает

$$\rho \approx nm + \frac{3}{2} p. \tag{2.10.25}$$

Для горячего ультрарелятивистского газа имеем

$$E_N \approx |\mathbf{p}_N| \gg m,$$

а потому из (2.10.22) следует

$$\rho \approx 3p + nm. \tag{2.10.26}$$

Оба уравнения (2.10.25) и (2.10.26) можно объединить в одно, имеющее вид

$$\rho - nm \approx (\gamma - 1)^{-1} p, \tag{2.10.27}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3} — \text{нерелятивистский газ}, \\ \frac{4}{3} — \text{ультрарелятивистский газ}. \end{cases} \tag{2.10.28}$$

Тогда соотношение (2.10.18) можно переписать так:

$$kT\, d\sigma = p d\left(\frac{1}{n}\right) + (\gamma - 1)^{-1} d\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma - 1} d\left(\frac{p}{n^\gamma}\right). \tag{2.10.29}$$

В итоге уравнение (2.10.19) приобретает вид

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) + (\mathbf{v} + \nabla)\left(\frac{p}{n^\gamma}\right), \tag{2.10.30}$$

а выражая ρ через n и p с помощью (2.10.27), можно переписать аналогичным образом и уравнение (2.10.16). Пропорциональность между внутренней энергией и давлением, следующая из уравнения (2.10.27), в действительности имеет место при различных значениях γ для класса жидкостей, намного более широкого, чем рассмотренный здесь холодный газ, состоящий из точечных частиц. Для всех этих жидкостей уравнение энергии может быть записано в форме (2.10.30).

Вычислим в качестве примера скорость звука в статической однородной релятивистской жидкости. В невозмущенном состоянии величины n, ρ, p и σ постоянны в пространстве и во времени, а $\mathbf{v}=0$. Звуковые волны порождают малые отклонения n_1, ρ_1, p_1 и $\mathbf{v}_1$ от n, ρ, p и $\mathbf{v}$; остается неизменным, согласно (2.10.19), лишь σ.

В первом порядке по малым величинам уравнения (2.10.15) и (2.10.16) запишутся в виде

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}+n\nabla\cdot\mathbf{v}_1=0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}=-\frac{\nabla p_1}{p+\rho}.$$

Но при $d\sigma=0$ уравнение (2.10.18) приводит к соотношению

$$-\frac{p+\rho}{n}n_1+\rho_1=0,$$

так что

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}=-\frac{v_s^2\nabla n_1}{n},$$

где

$$v_s^2\equiv\frac{p_1}{\rho_1}=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\sigma=\mathrm{const}} \tag{2.10.31}$$

Объединяя уравнения для n_1 и $\mathbf{v}_1$, получаем волновое уравнение

$$0=\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_s^2\nabla^2\right]n_1,$$

из которого следует, что звуковые волны перемещаются со скоростью v_s точно так же, как и в нерелятивистской жидкости. В нерелятивистской жидкости скорость звука много меньше скорости света (равной единице), но она увеличивается с повышением температуры, так что представляет интерес проверить, будет ли для жидкости, состоящей из предельно-релятивистских частиц, такой, как водород при температуре $>10^{13}$ К, скорость v_s превышать единицу. Для этой жидкости выражения (2.10.26) и (2.10.31) дают следующее значение скорости звука:

$$v_s=\frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{2.10.32}$$

которое все еще существенно меньше единицы. Этот результат справедлив и с учетом электромагнитных сил, так как уравнения (2.10.7) и (2.8.9) налагают на электромагнитное давление $p_{\text{эм}}$ и плотность энергии $\rho_{\text{эм}}$ соотношение

$$T^{\alpha}_{\text{эм}\,\alpha}=3p_{\text{эм}}-\rho_{\text{эм}}=0 \tag{2.10.33}$$

и, следовательно, введение $p_{эм}$ и $\rho_{эм}$ не нарушает справедливости соотношений (2.10.26) или (2.10.32). Вопрос о том, останется ли v_s меньше единицы при учете неэлектромагнитных сил [7], остается открытым.

§ 11. Релятивистская реальная жидкость *

Предыдущий параграф был посвящен изучению идеальной жидкости, в которой средние длины свободного пробега и времена столкновений были настолько малы, что вокруг любой точки движущейся жидкости сохранялась идеальная изотропия. На практике мы часто имеем дело с далеко не идеальными жидкостями, в которых давление, плотность или скорость значительно меняются на расстояниях порядка длины свободного пробега, или за промежутки времени столкновений, или на обоих интервалах одновременно. В таких жидкостях тепловое равновесие не сохраняется строго и кинетическая энергия жидкости рассеивается в виде тепла.

При корректном рассмотрении диссипативных процессов в релятивистских жидкостях возникают некоторые тонкие принципиальные вопросы, которые не возникают в нерелятивистском случае. В связи с этим, а также из-за того, что диссипация приобретает все возрастающее значение в современной теории ранней эволюции Вселенной (см. § 8, 10 и 11 гл. 15), стоит потрудиться и обрисовать контуры общей теории релятивистских реальных жидкостей.

Предположим, что в реальной жидкости слабые пространственные и временные градиенты приводят к изменению тензора энергии-импульса и вектора тока частиц на $\Delta T^{\alpha\beta}$ и ΔN^{α}, являющиеся величинами первого порядка по этим градиентам. Тогда вместо (2.10.7) и (2.10.13) возникают соотношения

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)\, U^{\alpha}U^{\beta} + \Delta T^{\alpha\beta} \tag{2.11.1}$$

$$N^{\alpha} = nU^{\alpha} + \Delta N^{\alpha} \tag{2.11.2}$$

Как только мы вводим такие поправочные члены, определения давления p, плотности энергии ρ, плотности числа частиц n и скорости жидкости U^{α} становятся несколько неопределенными.

Обычно определяют ρ и n как плотность полной энергии и плотность числа частиц в сопутствующей системе отсчета:

$$T^{00} \equiv \rho, \tag{2.11.3}$$

$$N^{0} \equiv n, \tag{2.11.4}$$

*) Этот и два последующих параграфа лежат несколько в стороне от основной линии изложения и при первом чтении могут быть опущены.