и, следовательно, введение $p_{\text{эм}}$ и $\rho_{\text{эм}}$ не нарушает справедливости соотношений (2.10.26) или (2.10.32). Вопрос о том, останется ли v_s меньше единицы при учете неэлектромагнитных сил [7], остается открытым.

§ 11. Релятивистская реальная жидкость *

Предыдущий параграф был посвящен изучению идеальной жидкости, в которой средние длины свободного пробега и времена столкновений были настолько малы, что вокруг любой точки движущейся жидкости сохранялась идеальная изотропия. На практике мы часто имеем дело с далеко не идеальными жидкостями, в которых давление, плотность или скорость значительно меняются на расстояниях порядка длины свободного пробега, или за промежутки времени столкновений, или на обоих интервалах одновременно. В таких жидкостях тепловое равновесие не сохраняется строго и кинетическая энергия жидкости рассеивается в виде тепла.

При корректном рассмотрении диссипативных процессов в релятивистских жидкостях возникают некоторые тонкие принципиальные вопросы, которые не возникают в нерелятивистском случае. В связи с этим, а также из-за того, что диссипация приобретает все возрастающее значение в современной теории ранней эволюции Вселенной (см. § 8, 10 и 11 гл. 15), стоит потрудиться и обрисовать контуры общей теории релятивистских реальных жидкостей.

Предположим, что в реальной жидкости слабые пространственные и временные градиенты приводят к изменению тензора энергии-импульса и вектора тока частиц на $\Delta T^{\alpha\beta}$ и ΔN^{α}, являющиеся величинами первого порядка по этим градиентам. Тогда вместо (2.10.7) и (2.10.13) возникают соотношения

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)\,U^{\alpha}U^{\beta} + \Delta T^{\alpha\beta} \qquad (2.11.1)$$

$$N^{\alpha} = nU^{\alpha} + \Delta N^{\alpha} \qquad (2.11.2)$$

Как только мы вводим такие поправочные члены, определения давления p, плотности энергии ρ, плотности числа частиц n и скорости жидкости U^{α} становятся несколько неопределенными.

Обычно определяют ρ и n как плотность полной энергии и плотность числа частиц в сопутствующей системе отсчета:

$$T^{00} \equiv \rho, \qquad (2.11.3)$$

$$N^{0} \equiv n, \qquad (2.11.4)$$

*) Этот и два последующих параграфа лежат несколько в стороне от основной линии изложения и при первом чтении могут быть опущены.

причем соответствующая система характеризуется условием, требующим, чтобы в заданной точке 4-вектор скорости был равен

$$U^i \equiv 0, \qquad U^0 \equiv 1. \tag{2.11.5}$$

Кроме того, давление p в общем случае задается той же функцией от ρ и n [скажем, (2.10.27)], что и в том случае, когда все градиенты в жидкости пренебрежимо малы и диссипация отсутствует. И наконец, в случае нерелятивистской жидкости необходимо знать, будет ли U^α скоростью переноса энергии или переноса частиц. У Ландау и Лифшица [8] U^α принято за скорость переноса энергии; тогда в движущейся системе T^{i0} исчезает. У Эккарта [9] U^α есть скорость переноса частиц, поэтому в сопутствующей системе исчезает величина N^i. Оба подхода совершенно эквивалентны, однако подход Эккарта кажется несколько более удобным, и в дальнейшем мы будем его придерживаться.

При таком определении U^α в сопутствующей системе имеем

$$N^i \equiv 0. \tag{2.11.6}$$

Из сравнения (2.11.3) — (2.11.6) с (2.11.1) и (2.11.2) следует, что в сопутствующей системе на диссипативные члены $\Delta T^{\alpha\beta}$ и ΔN^α накладываются следующие ограничения:

$$\Delta T^{00} = \Delta N^0 = \Delta N^i = 0, \tag{2.11.7}$$

и, следовательно, в любой лоренцевой системе будет выполняться условие

$$U^\alpha U^\beta \Delta T_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.11.8}$$

$$\Delta N^\alpha = 0. \tag{2.11.9}$$

Таким образом, все эффекты, связанные с диссипацией, появляются как вклады в тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$. Наша задача теперь — построить наиболее общий диссипативный тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$, который удовлетворял бы уравнению (2.11.8) и второму закону термодинамики.

Для этой цели вычислим энтропию, возникающую при движении жидкости. Как и в предыдущем параграфе, начнем с того, что свернем выражение (2.8.7) с 4-вектором U_α:

$$U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.11.10}$$

Исходя из тех же соображений, которые были использованы при выводе (2.10.19) для идеальной жидкости, убеждаемся, что в общем случае выполняется соотношение

$$U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)\, U^\alpha U^\beta\right] = -kT\, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(n\sigma U^\alpha\right),$$

где T и σk — температура и приходящаяся на одну частицу энтропия, определяемые уравнением (2.10.18). Следовательно, (2.11.10) запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(n\sigma U^\alpha)=\frac{1}{kT}U_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta}\Delta T^{\alpha\beta},$$

или в эквивалентном виде,

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha}=-\frac{1}{T}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta}\Delta T^{\alpha\beta}+\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^\beta}U_\alpha\Delta T^{\alpha\beta}, \qquad (2.11.11)$$

где

$$S^\alpha\equiv nk\sigma U^\alpha-T^{-1}U_\beta\Delta T^{\alpha\beta}. \qquad (2.11.12)$$

Плотность энтропии в сопутствующей системе равна $nk\sigma=S^0$, так что S^α можно рассматривать как 4-вектор тока энтропии, и, следовательно, выражение (2.11.11) дает скорость прироста энтропии в единичном объеме. Далее, второй закон термодинамики требует, чтобы $\Delta T^{\alpha\beta}$ было линейной комбинацией градиентов скорости и температуры. Следовательно, правая часть (2.11.11) *положительна* для всех возможных типов течения. Заметим, что это стало возможным только из-за включения в уравнение (2.11.12) второго члена. Без него величина $\partial S^\alpha/\partial x^\alpha$ не была бы квадратичной формой первых производных и, следовательно, не могла бы быть положительной для всех типов течения. Более того, тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$ не должен содержать градиентов p, ρ, n и других величин, так как тогда в формулу (2.11.11) входили бы произведения градиентов давлений или плотности на градиенты скорости или температуры, а эти произведения не обязательно положительны для любых типов течения.

Теперь удобно перейти в сопутствующую систему координат, в которой U^α имеет в заданной пространственно-временной точке P форму (2.11.5). Из (2.10.17) следует, что в такой системе все градиенты U^0 обращаются в точке P в нуль. Полагая в уравнении (2.11.11) U^i, $\partial U^0/\partial x^\alpha$ и ΔT^{00} равными нулю, найдем, что в точке P в сопутствующей лоренцевой системе скорость прироста энтропии, приходящейся на единицу объема, равна

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha}=-\left(\frac{1}{T}\dot{U}_i+\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^i}\right)\Delta T^{i0}-\frac{1}{T}\frac{\partial U_i}{\partial x^j}\Delta T^{ij}. \qquad (2.11.13)$$

Для того чтобы это выражение было положительным всегда, должны выполняться соотношения

$$\Delta T^{i0}=-\chi\left(\frac{\partial T}{\partial x^i}+T\dot{U}_i\right), \qquad (2.11.14)$$

$$\Delta T^{ij}=-\eta\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j}+\frac{\partial U_j}{\partial x^i}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{U}\delta_{ij}\right)-\zeta\nabla\cdot\mathbf{U}\delta_{ij} \qquad (2.11.15)$$

с положительными коэффициентами

$$\chi\geqslant 0, \qquad \eta\geqslant 0, \qquad \zeta\geqslant 0, \qquad (2.11.16)$$

и, следовательно, (2.11.13) запишется в виде

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\chi}{T^2}(\nabla T+T\dot{\mathbf{U}})^2+\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j}+\frac{\partial U_j}{\partial x^i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j}+\frac{\partial U_j}{\partial x^i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}\right)+\frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\mathbf{U})^2\geqslant 0. \qquad (2.11.17)$$

За исключением релятивистской поправки $T\dot{\mathbf{U}}$, вид (2.11.14) и (2.11.15) тот же, что и в нерелятивистской теории реальных жидкостей [8], и, следовательно, величины χ, η и ζ можно отождествить соответственно с коэффициентом теплопроводности и двумя коэффициентами вязкости: вязкости сдвига и объемной вязкости.

Теперь нам остается только придать нашим результатам (2.11.5) (2.11.7), (2.11.14), (2.11.15), справедливым в такой форме только в сопутствующей системе отсчета, вид, который был бы справедлив в любой лоренцевой системе. Определим для этого *тензор сдвига* как

$$W_{\alpha\beta}\equiv\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial U^\gamma}{\partial x^\gamma}, \qquad (2.11.18)$$

тепловой поток как

$$Q_\alpha\equiv\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}+T\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta}U^\beta \qquad (2.11.19)$$

и тензор проецирования на гиперплоскость, нормальную к U^α,

$$H_{\alpha\beta}\equiv\eta_{\alpha\beta}+U_\alpha U_\beta \qquad (2.11.20)$$

Можно непосредственно проверить, что в сопутствующей лоренцевой системе отсчета тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$, записанный следующим образом:

$$\Delta T^{\alpha\beta}=-\eta H^{\alpha\gamma}H^{\beta\delta}W_{\gamma\delta}-\chi\left(H^{\alpha\gamma}U^\beta+H^{\beta\gamma}U^\alpha\right)Q_\gamma-$$

$$-\zeta H^{\alpha\beta}\frac{\partial U^\gamma}{\partial x^\gamma}, \qquad (2.11.21)$$

удовлетворяет соотношениям (2.11.7), (2.11.14) и (2.11.15). Поскольку формула (2.11.21) лоренц-инвариантна и справедлива в сопутствующей лоренцевой системе отсчета, она справедлива во всех лоренцевых системах.

Исходя из соображений размерности, можно вообще ожидать, что коэффициенты χT, η и ζ имеют тот же порядок, что и давление или плотность тепловой энергии, умноженные на некоторое среднее время. Существуют, однако, важные частные случаи (см., например, [11]), когда объемная вязкость ζ много меньше, чем η или χT. Чтобы увидеть, когда такие ситуации возникают, заметим, что выражения (2.11.1) и (2.11.21) приводят к следующему значению следа полного тензора энергии-импульса:

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = 3p - \rho - 3\zeta \frac{\partial U^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}. \tag{2.11.22}$$

Пусть мы имеем дело со средой, для которой этот след можно выразить как функцию только ρ и n:

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = f(\rho, n). \tag{2.11.23}$$

Например, для однородного газа, характеризуемого выражением (2.10.20), этот след имеет вид

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = -\sum_N \frac{m^2}{E_N} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N).$$

В ультрарелятивистском случае при $E_N \gg m$ выражение (2.11.23) будет выполняться, если только

$$f(\rho, n) \approx 0.$$

В нерелятивистском случае имеем

$$\frac{1}{E_N} \approx \frac{1}{m} - \left(\frac{E_N - m}{m^2}\right),$$

поэтому (2.11.23) удовлетворяется при условии

$$f(\rho, n) \approx -mn + (\rho - mn).$$

Если градиенты скорости отсутствуют, уравнения (2.11.22) и (2.11.23) дадут следующую формулу для давления:

$$p = \frac{1}{3}[\rho + f(\rho, n)]. \tag{2.11.24}$$

Но поскольку мы договорились определять p в общем случае в виде той же функции ρ и n, что и в отсутствие диссипации, то (2.11.24) должно быть справедливым и при наличии градиентов скорости. Поэтому выражения (2.11.22), (2.11.23) и (2.11.24) приводят к условию

$$\zeta = 0. \tag{2.11.25}$$

Однако было бы неверным делать вывод, что ζ всегда пренебрежимо мало. Как мы видели, для однородного газа след тензора энергии-импульса является функцией исключительно ρ и n только в ультрарелятивистском или ультранерелятивистском пределах: для случая kT порядка m T^{α}_{α} нельзя привести к виду (2.11.23), и объемная вязкость будет иметь тот же порядок, что и вторая вязкость [10, 11]. Объемная вязкость является также важной [12] для сред, в которых легко происходит обмен энергией между поступательными и внутренними степенями свободы, как это имеет место для газа, состоящего из твердых шариков [13].

Другой частный случай, очень важный для космологии,— это материальная среда с очень коротким средним временем свободного пробега, которая взаимодействует с квантами излучения, имеющими конечное среднее время свободного пробега τ. Для такой среды коэффициент теплопроводности и оба коэффициента вязкости вычисляются в виде

$$\chi = \frac{4}{3} aT^3\tau, \tag{2.11.26}$$

$$\eta = \frac{4}{15} aT^4\tau, \tag{2.11.27}$$

$$\zeta = 4aT^4\tau\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_n\right]^2, \tag{2.11.28}$$

где a — постоянная Стефана — Больцмана, определяемая так, что плотность энергии излучения равна aT^4, и p и ρ являются полным давлением и плотностью энергии вещества и излучения. (Определение χ см. в [14], определение η — в [15], определения ζ, χ, η — в [16].) Отметим, что в общем случае χ^T, η и ζ сравнимы между собой, но если давление и тепловая энергия обусловлены в основном излучением, то $(\partial p/\partial\rho)_n \approx {}^1/_3$ и, как и ожидается, объемная вязкость будет мала.

§ 12. Представления группы Лоренца *

Тензорный формализм, описанный в § 5 гл. 2, вполне хорош для того, чтобы с его помощью разбирать проблемы релятивистской классической физики. Однако, рассматривая правила лоренцевых преобразований более общим путем, на основе достижений теории представлений однородной группы Лоренца, можно получить некоторые формальные преимущества. В § 5 гл. 12 мы увидим, что такой подход позволяет элегантным образом переформулировать эффекты гравитации на случай произвольных физических систем. Кроме того, поля с полуцелым спином можно изучать только с помощью группового подхода.

Согласно общим правилам, набор величин ψ_n под действием лоренцевого преобразования $\Lambda^\alpha{}_\beta$ переходит в новый набор величин

$$\psi'_n = \sum_m [D(\Lambda)]_{nm}\psi_m. \tag{2.12.1}$$

Для того чтобы два последовательно проведенных лоренцевых преобразования Λ_1 и Λ_2 приводили к тому же результату, что и преобразование $\Lambda_1\Lambda_2$, необходимо, чтобы матрица $D(\Lambda)$ определяла *представление* группы Лоренца, т. е

$$D(\Lambda_1)\,D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{2.12.2}$$

Операция матричного умножения определена обычным образом.