Другой частный случай, очень важный для космологии,— это материальная среда с очень коротким средним временем свободного пробега, которая взаимодействует с квантами излучения, имеющими конечное среднее время свободного пробега τ. Для такой среды коэффициент теплопроводности и оба коэффициента вязкости вычисляются в виде

$$\chi = \frac{4}{3} aT^3\tau, \tag{2.11.26}$$

$$\eta = \frac{4}{15} aT^4\tau, \tag{2.11.27}$$

$$\zeta = 4aT^4\tau\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_n\right]^2, \tag{2.11.28}$$

где a — постоянная Стефана — Больцмана, определяемая так, что плотность энергии излучения равна aT^4, и p и ρ являются полным давлением и плотностью энергии вещества и излучения. (Определение χ см. в [14], определение η — в [15], определения ζ, χ, η — в [16].) Отметим, что в общем случае χ^T, η и ζ сравнимы между собой, но если давление и тепловая энергия обусловлены в основном излучением, то $(\partial p/\partial \rho)_n \approx {}^1/_3$ и, как и ожидается, объемная вязкость будет мала.

§ 12. Представления группы Лоренца *

Тензорный формализм, описанный в § 5 гл. 2, вполне хорош для того, чтобы с его помощью разбирать проблемы релятивистской классической физики. Однако, рассматривая правила лоренцевых преобразований более общим путем, на основе достижений теории представлений однородной группы Лоренца, можно получить некоторые формальные преимущества. В § 5 гл. 12 мы увидим, что такой подход позволяет элегантным образом переформулировать эффекты гравитации на случай произвольных физических систем. Кроме того, поля с полуцелым спином можно изучать только с помощью группового подхода.

Согласно общим правилам, набор величин ψ_n под действием лоренцевого преобразования $\Lambda^\alpha{}_\beta$ переходит в новый набор величин

$$\psi'_n = \sum_m [D(\Lambda)]_{nm}\psi_m. \tag{2.12.1}$$

Для того чтобы два последовательно проведенных лоренцевых преобразования Λ_1 и Λ_2 приводили к тому же результату, что и преобразование $\Lambda_1\Lambda_2$, необходимо, чтобы матрица $D(\Lambda)$ определяла *представление* группы Лоренца, т. е

$$D(\Lambda_1)\,D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{2.12.2}$$

Операция матричного умножения определена обычным образом.

Например, если ψ есть контравариантный вектор V^α, то $D(\Lambda)$ представляет собой просто выражение

$$[D(\Lambda)]^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta, \tag{2.12.3}$$

если же ψ — ковариантный тензор $T_{\alpha\beta}$, то соответствующая D-матрица равна

$$[D(\Lambda)]_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda_\beta{}^\delta. \tag{2.12.4}$$

Легко проверить, что выражения (2.12.3) и (2.12.4) удовлетворяют групповому правилу умножения (2.12.2). Мы можем перебрать все возможные правила преобразований Лоренца, конструируя наиболее общее представление однородной группы Лоренца.

Фактически большинство наиболее общих преобразований однородной группы Лоренца реализуется тензорными представлениями вида (2.12.3) и (2.12.4), и поэтому можно надеяться, что все физически интересные величины являются тензорами. Однако у *инфинитезимальной* группы Лоренца есть еще и другие представления — *спинорные представления*, играющие важную роль в релятивистской квантовой теории поля. Инфинитезимальная группа Лоренца содержит лоренцевы преобразования, бесконечно близкие к тождественным, т. е.

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta, \quad |\omega^\alpha{}_\beta| \ll 1. \tag{2.12.5}$$

Чтобы такое преобразование удовлетворяло основному условию преобразований Лоренца (2.1.2), необходимо выполнение следующего равенства:

$$(\delta^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)(\delta^\beta{}_\delta + \omega^\beta{}_\delta)\,\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta},$$

которое в первом порядке по ω имеет вид

$$\omega_{\gamma\delta} = -\omega_{\delta\gamma}, \tag{2.12.6}$$

причем индексы у ω опускаются, конечно, с помощью метрики η:

$$\omega_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha}\omega^\alpha{}_\delta.$$

Для такого преобразования матрица представления $D(\Lambda)$ должна быть бесконечно близка к тождественной, т. е.

$$D(1+\omega) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \tag{2.12.7}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ есть фиксированный набор матриц, которые благодаря (2.12.6) можно всегда выбрать антисимметричными по α и β:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}. \tag{2.12.8}$$

Например, для тензорного представления (2.12.3) и (2.12.4) имеем

$$[\sigma_{\alpha\beta}]^{\gamma}{}_{\delta} = \delta_{\alpha}{}^{\gamma}\eta_{\beta\delta} - \delta_{\beta}{}^{\gamma}\eta_{\alpha\delta}, \tag{2.12.9}$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}]_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon\zeta} = \eta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta}{}^{\varepsilon}\delta^{\zeta}{}_{\delta} - \eta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha}{}^{\varepsilon}\delta^{\zeta}{}_{\delta} + \eta_{\alpha\delta}\delta_{\beta}{}^{\zeta}\delta^{\varepsilon}{}_{\gamma} - \eta_{\beta\delta}\delta_{\alpha}{}^{\zeta}\delta^{\varepsilon}{}_{\gamma}. \tag{2.12.10}$$

Матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$ не могут быть произвольными постоянными матрицами, а должны быть такими, чтобы матрица $D(\Lambda)$ удовлетворяла групповому правилу умножения (2.12.2). Применим прежде всего это правило к произведению $\Lambda[1+\omega]\Lambda^{-1}$:

$$D(\Lambda)\,D(1+\omega)\,D(\Lambda^{-1}) = D(1+\Lambda\omega\Lambda^{-1}).$$

В нулевом порядке по ω это есть просто тождество $1 = 1$, но уже в первом порядке, приравнивая коэффициенты при $\omega_{\alpha\beta}$ с обеих сторон, получаем

$$D(\Lambda)\,\sigma_{\alpha\beta}D(\Lambda^{-1}) = \sigma_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\delta}{}_{\beta}. \tag{2.12.11}$$

Если положить теперь $\Lambda = 1 + \omega$, $\Lambda^{-1} = 1 - \omega$ (причем ω совсем не обязательно должно быть здесь тем же самым), то в первом порядке по ω выполнение этого условия требует, чтобы σ удовлетворяло коммутационным соотношениям

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\sigma_{\gamma\beta}, \tag{2.12.12}$$

где квадратные скобки означают обычный коммутатор матриц

$$[u, v] \equiv uv - vu.$$

Читатель может легко проверить, что матрицы (2.12.9) и (2.12.10) удовлетворяют соотношению (2.12.12).

Этим коммутационным соотношениям можно придать несколько более простую форму, если ввести новые матрицы:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}[-i\sigma_{23} + \sigma_{10}], & b_1 &= \frac{1}{2}[-i\sigma_{23} - \sigma_{10}], \\ a_2 &= \frac{1}{2}[-i\sigma_{31} + \sigma_{20}], & b_2 &= \frac{1}{2}[-i\sigma_{31} - \sigma_{20}], \\ a_3 &= \frac{1}{2}[-i\sigma_{12} + \sigma_{30}], & b_3 &= \frac{1}{2}[-i\sigma_{12} - \sigma_{30}]. \end{aligned} \tag{2.12.13}$$

Тогда уравнение (2.12.12) примет вид:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = i\mathbf{a}, \tag{2.12.14}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{b} = i\mathbf{b}, \tag{2.12.15}$$

$$[a_i, b_j] = 0. \tag{2.12.16}$$

Формулы (2.12.14) — (2.12.16) — просто коммутационные соотношения для пары независимых матриц углового момента. Правила построения таких матриц можно найти в любом учебнике по нерелятивистской квантовой механике (см., например, [17]).

В самом общем случае матрицы **a** и **b** являются прямой суммой «неприводимых» компонент, причем каждая матрица характеризуется целым или полуцелым числом A или B, т. е.

$$\mathbf{a}^2 = A(A+1), \qquad \mathbf{b}^2 = B(B+1) \tag{2.12.17}$$

и размерность матриц равна $2A+1$ и $2B+1$ соответственно. Следовательно, наиболее общие величины ψ_n, трансформирующиеся линейно при инфинитезимальных однородных преобразованиях Лоренца, можно разложить на «неприводимые» части, характеризуемые парой целых и (или) полуцелых чисел (A, B), причем каждая из неприводимых частей имеет $(2A+1)(2B+1)$ компонент.

Непосредственные вычисления показывают, что контравариантное векторное представление (2.12.9), так же как и соответствующий ему ковариант, характеризуется $A = B = {}^1/_2$. Любое тензорное представление вида (2.12.10) можно рассматривать как прямое произведение векторных представлений, и поэтому оно состоит только из неприводимых компонент, для которых $A+B$ есть *целое* число. Например, общее тензорное представление (2.12.10) для тензора второго ранга будет состоять из неприводимых компонент, для которых пара чисел (A, B) принимает значения (1, 1), (1, 0), (0, 1) и (0, 0). Представление, у которого $A+B$ — *полуцелое*, полностью отличается от тензорного и называется *спинорным представлением*. Простейшим примером такого представления служит дираковское представление поля электрона, состоящее из компонент $({}^1/_2, 0)$ и $(0, {}^1/_2)$.

Трансформационные свойства любого объекта при обычных пространственных вращениях определяются его поведением относительно инфинитезимальных преобразований Лоренца (2.12.5), у которых $\omega_{i0} = 0$ и, следовательно, определяется структурой чисто пространственных компонент σ_{12}, σ_{23}, σ_{31} матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$. Из этих компонент можно построить векторную матрицу

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = -i\,\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}, \tag{2.12.18}$$

которая, согласно (2.12.14) — (2.12.16), будет иметь те же коммутационные соотношения, что и угловой момент

$$\mathbf{s} \times \mathbf{s} = i\mathbf{s}. \tag{2.12.19}$$

Любое неприводимое представление (A, B) однородной группы Лоренца можно разложить [17] на составляющие, для каждой из которых величина $\mathbf{s}^2$ равна $s(s+1)$, где s — целое или полуцелое число, лежащее между $|A-B|$ и $A+B$. Каждая составляющая описывает возбуждение (например, частицу) со спином s. Далее из (2.12.18) вытекает, что тензорные представления могут описывать только возбуждения с целым спином, а спинорные представления — только с полуцелым спином.

Конечное преобразование Лоренца можно построить, перемножая бесконечное число инфинитезимальных лоренцевых преобразований. Таким образом, тензорное представление инфинитезимальной группы Лоренца можно использовать для построения тензорного представления вида (2.12.3) и (2.12.4) группы конечных лоренцевых преобразований. Однако если попытаться построить спинорное представление конечных преобразований Лоренца, то мы обнаружим, что можно получить «представление только с точностью до знака» [18], т. е. групповой закон умножения (2.12.2) будет иногда иметь с правой стороны знак минус. Например, произведение двух последовательных вращений на 180° вокруг любой заданной оси приводит к единичной матрице, но не со знаком плюс, а со знаком минус. Появление этого минуса означает, что спинорные поля сами по себе физически не наблюдаемы, хотя четные функции от спинорных полей вполне наблюдаемы.

§ 13. Временна́я последовательность и античастицы*

Одна из наиболее удивительных особенностей преобразований Лоренца заключается в том, что эти преобразования не оставляют инвариантным порядок событий. Пусть, например, в некоторой системе отсчета наблюдаемое событие в точке x_2 возникло позже, чем событие в точке x_1, т. е. $x_2^0 > x_1^0$. Для другого наблюдателя, движущегося относительно первого со скоростью $\mathbf{v}$, эти события будут разделены временны́м интервалом:

$$x_2'^{(0)} - x_1'^{(0)} = \Lambda^{(0)}{}_{\alpha}(\mathbf{v})(x_2^{\alpha} - x_1^{\alpha}),$$

где $\Lambda^{\beta}{}_{\alpha}(\mathbf{v})$ — буст, определяемый уравнениями (2.1.17) и (2.1.21). Применяя (2.1.17) и (2.1.21), получаем

$$x_2'^{(0)} - x_1'^{(0)} = \gamma(x_2^0 - x_1^0) + \gamma\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1),$$

и эта величина будет отрицательной, если

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) < -(x_2^0 - x_1^0). \qquad (2.13.1)$$

На первый взгляд, возникла опасность логического парадокса. Пусть первый наблюдатель видит в точке x_1 радиоактивный распад $A \to B + C$ и последующее поглощение в точке x_2 частицы B, например $B + D \to E$. Не будет ли второй наблюдатель видеть поглощение частицы B в x_2 до ее излучения в точке x_1? Парадокс исчезнет, если мы обратим внимание на то, что скорость $|\mathbf{v}|$, характеризующая любое преобразование Лоренца $\Lambda(\mathbf{v})$, должна быть меньше единицы, поэтому соотношение (2.13.1) будет удовлетворяться, только если справедливо неравенство

$$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| > |x_2^0 - x_1^0|. \qquad (2.13.2)$$