спутник из-за наличия Солнца и обращения Земли, равны гравитационной и инерционной силам, действующим на Землю, умноженным на отношение гравитационной и инертной масс (если пренебречь расстоянием между спутником и центром массы Земли).

Таким образом, получается, что эти две силы не будут уравновешиваться для спутника, причем гравитационная сила будет больше инерционной силы на $8{,}4\cdot10^{-10}$. Ускорение из-за тяготения к Солнцу на околоземной орбите составляет $6\cdot10^{-4}$ от ускорения в поле тяжести Земли на ее поверхности. Отсюда следует, что если гравитационная энергия связи Земли полностью входит в ее инертную массу и не дает вообще никакого вклада в ее гравитационную массу, тогда искусственный спутник на проходящей близко у Земли орбите будет эффективно чувствовать притяжение к Солнцу, равное гравитационному притяжению к Земле, умноженному на коэффициент $5{,}4\cdot10^{-13}$. Этот крошечный эффект полностью маскируется «приливной» силой, возникающей из-за того, что расстояние между спутником и центром массы Земли велико, и нет надежды измерить этот эффект [1]). Это весьма огорчительно, поскольку такое измерение было бы явно самой строгой проверкой применимости принципа эквивалентности к гравитационным полям, из которого мы будем исходить в гл. 5 при получении уравнений поля Эйнштейна.

§ 2. Гравитационные силы

Рассмотрим частицу, свободно движущуюся под действием чисто гравитационных сил. Согласно принципу эквивалентности, имеется свободно падающая система координат ξ^α, в которой частица движется по прямой линии в пространстве-времени, что описывается уравнением

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2}=0, \tag{3.2.1}$$

где $d\tau$ — собственное время

$$d\tau^2=-\eta_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta. \tag{3.2.2}$$

[Ср. уравнения (2.3.1) и (2.1.4).] Предположим теперь, что мы взяли любую другую систему координат x^μ, которой может быть система декартовых координат, покоящаяся относительно лаборатории, а также криволинейная, ускоренная, вращающаяся или любая другая система по нашему желанию. Координаты ξ^α свободно падающей системы отсчета являются функциями от x^μ, и

[1]) См., однако, стр. 11, 12 — *Прим. ред.*

уравнение (3.2.1) принимает вид

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0.$$

Умножая это уравнение на $\partial x^\lambda/\partial\xi^\alpha$ и используя известное правило умножения, получаем

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}=\delta^\lambda_\mu,$$

что приводит к следующему уравнению движения:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0, \tag{3.2.3}$$

где $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ — это *аффинная связность*, определяемая следующим образом:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}. \tag{3.2.4}$$

Собственное время (3.2.2) также может быть выражено в произвольной системе координат:

$$d\tau^2=-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,dx^\nu, \tag{3.2.5}$$

или

$$d\tau^2=-g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu, \tag{3.2.6}$$

где $g_{\mu\nu}$ — *метрический тензор*, который определяется так:

$$g_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.2.7}$$

Для фотона или нейтрино уравнение движения в свободно падающей системе отсчета такое же, как (3.2.1), за исключением того, что собственное время (3.2.2) уже нельзя считать независимой переменной, поскольку для частицы с нулевой массой правая часть (3.2.2) исчезает. Вместо τ можно использовать $\sigma\equiv\xi^0$, так, что (3.2.1) и (3.2.2) принимают вид

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\sigma^2}=0,$$

$$-\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\sigma}\frac{d\xi^\beta}{d\sigma}=0.$$

Действуя так же, как и выше, находим, что уравнение движения в произвольном гравитационном поле в произвольной системе

координат записывается следующим образом:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}=0, \tag{3.2.8}$$

$$-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}=0, \tag{3.2.9}$$

где $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ и $g_{\mu\nu}$ определяются по-прежнему выражениями (3.2.4) и (3.2.7).

Между прочим, как в (3.2.3), так и в (3.2.8) нет необходимости знать, что такое τ и σ для определения движения нашей частицы; решения этих уравнений суть $x^\mu(\tau)$ или $x^\mu(\sigma)$, а τ или σ могут быть исключены при нахождении $\mathbf{x}(t)$. Мы привели формулу (3.2.6), чтобы показать, как вычисляется собственное время; формула же (3.2.9) показывает, как вводятся начальные условия для частицы с массой, равной нулю. В частности, уравнение (3.2.9) говорит нам о том, что время dt, за которое фотон проходит расстояние $d\mathbf{x}$, определяется из квадратного уравнения

$$g_{00}\,dt^2+2g_{i0}\,dx^i\,dt+g_{ij}\,dx^i\,dx^j=0,$$

где i и j пробегают значения 1, 2, 3. Решение его имеет вид

$$\frac{1}{g_{00}}\left[-g_{i0}\,dx^i-\{(g_{i0}g_{j0}-g_{ij}g_{00})\,dx^i\,dx^j\}^{1/2}\right]=dt, \tag{3.2.10}$$

и, таким образом, время, за которое свет проходит какой-либо путь, можно вычислить, интегрируя dt по этому пути.

Значения метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и аффинной связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ в точке X в произвольной системе координат — достаточная информация для определения локально-инерциальных координат $\xi^\alpha(x)$ в окрестности точки X. В самом деле, умножая уравнение (3.2.4) на $\partial\xi^\beta/\partial x^\lambda$ и используя правило умножения

$$\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}=\delta^\beta_\alpha,$$

приходим к дифференциальному уравнению для ξ^α:

$$\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}. \tag{3.2.11}$$

Решение его имеет вид

$$\xi^\alpha(x)=a^\alpha+b^\alpha{}_\mu(x^\mu-X^\mu)+\frac{1}{2}b^\alpha{}_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x^\mu-X^\mu)(x^\nu-X^\nu)+\ldots, \tag{3.2.12}$$

где

$$a^{\alpha}=\xi^{\alpha}(X), \quad b^{\alpha}{}_{\lambda}=\frac{\partial\xi^{\alpha}(X)}{\partial X^{\lambda}}. \tag{3.2.13}$$

Из уравнения (3.2.7) находим также, что

$$\eta_{\alpha\beta}b^{\alpha}{}_{\mu}b^{\beta}{}_{\nu}=g_{\mu\nu}(X). \tag{3.2.14}$$

Таким образом, при заданных в точке X значениях $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ локально-инерциальные координаты ξ^{α} определены с точностью до порядка $(x-X)^2$, если опустить сложности определения постоянных a^{α} и $b^{\alpha}{}_{\lambda}$. Величины $b^{\alpha}{}_{\lambda}$ определяются уравнением (3.2.13) с точностью до лоренцевого преобразования $b^{\alpha}{}_{\mu}\to\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}b^{\beta}_{\mu}$, так что неоднозначность решения $\xi^{\alpha}(x)$ отражает как раз тот факт, что если $\xi^{\alpha}(x)$ являются локально-инерциальными координатами, то ими же будут и $\Lambda^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta}+c^{\alpha}$. Следовательно, поскольку $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ определяют локально-инерциальные координаты с точностью до неоднородных преобразований Лоренца и поскольку гравитационное поле не может приводить к каким-либо эффектам в локально-инерциальной системе координат, то нет ничего удивительного в выводе, что все эффекты гравитации содержатся в $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Заметим, однако, что (3.2.12) удовлетворяет (3.2.11) только в точке $x=X$; для того чтобы найти решения (3.2.11) для всех x, необходимо, чтобы производные аффинной связности удовлетворяли некоторым условиям симметрии, которые будут обсуждаться в гл. 5.

§ 3. Связь между $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

Наше рассмотрение свободно падающих частиц показало, что поля, определяющие гравитационную силу, выражаются через «аффинную связность» $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, в то время как интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в двух бесконечно близко расположенных пространственных точках, определяется «метрическим тензором» $g_{\mu\nu}$. Покажем теперь, что $g_{\mu\nu}$ является также гравитационным потенциалом, т. е. его производные задают поле $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Прежде всего вспомним, что метрический тензор определяется выражением (3.2.7)

$$g_{\mu\nu}=\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}.$$

Дифференцирование по x^{λ} приводит к результату

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}+\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^2\xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}.$$