где

$$a^{\alpha}=\xi^{\alpha}(X), \quad b^{\alpha}{}_{\lambda}=\frac{\partial\xi^{\alpha}(X)}{\partial X^{\lambda}}. \tag{3.2.13}$$

Из уравнения (3.2.7) находим также, что

$$\eta_{\alpha\beta}b^{\alpha}{}_{\mu}b^{\beta}{}_{\nu}=g_{\mu\nu}(X). \tag{3.2.14}$$

Таким образом, при заданных в точке X значениях $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ локально-инерциальные координаты ξ^{α} определены с точностью до порядка $(x-X)^2$, если опустить сложности определения постоянных a^{α} и $b^{\alpha}{}_{\lambda}$. Величины $b^{\alpha}{}_{\lambda}$ определяются уравнением (3.2.13) с точностью до лоренцевого преобразования $b^{\alpha}{}_{\mu}\to\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}b^{\beta}_{\mu}$, так что неоднозначность решения $\xi^{\alpha}(x)$ отражает как раз тот факт, что если $\xi^{\alpha}(x)$ являются локально-инерциальными координатами, то ими же будут и $\Lambda^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta}+c^{\alpha}$. Следовательно, поскольку $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ определяют локально-инерциальные координаты с точностью до неоднородных преобразований Лоренца и поскольку гравитационное поле не может приводить к каким-либо эффектам в локально-инерциальной системе координат, то нет ничего удивительного в выводе, что все эффекты гравитации содержатся в $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Заметим, однако, что (3.2.12) удовлетворяет (3.2.11) только в точке $x=X$; для того чтобы найти решения (3.2.11) для всех x, необходимо, чтобы производные аффинной связности удовлетворяли некоторым условиям симметрии, которые будут обсуждаться в гл. 5.

§ 3. Связь между $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

Наше рассмотрение свободно падающих частиц показало, что поля, определяющие гравитационную силу, выражаются через «аффинную связность» $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, в то время как интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в двух бесконечно близко расположенных пространственных точках, определяется «метрическим тензором» $g_{\mu\nu}$. Покажем теперь, что $g_{\mu\nu}$ является также гравитационным потенциалом, т. е. его производные задают поле $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Прежде всего вспомним, что метрический тензор определяется выражением (3.2.7)

$$g_{\mu\nu}=\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}.$$

Дифференцирование по x^{λ} приводит к результату

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}+\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^2\xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}.$$

Используя теперь (3.2.11), получаем

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}.$$

Подставляя сюда (3.2.7), снова находим, что

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \tag{3.3.1}$$

Прежде чем разрешить это соотношение относительно Г, необходимо указать на некую тонкость в выводе соотношения (3.3.1), которая скрывалась за слишком компактными обозначениями. Когда мы выбираем локально-инерциальную систему координат $\xi^\alpha(x)$, мы привязываем ее к определенной точке X, и координаты, локально-инерциальные в X, в действительности должны обозначаться как $\xi^\alpha_X(x)$. Тогда уравнения (3.2.7) и (3.2.11) следует записать точнее:

$$g_{\mu\nu}(X) = \left(\frac{\partial \xi^\alpha_X(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta_X(x)}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X}, \tag{3.3.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha_X(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_{x=X} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X) \left(\frac{\partial \xi^\alpha_X(x)}{\partial x^\lambda} \right)_{x=X}. \tag{3.3.3}$$

Если мы продифференцируем (3.3.2) по X^λ, то получим члены двух разных типов. Первые возникают, когда мы полагаем $x = X$; эти члены состоят лишь из вторых производных (3.3.3) и их легко вычислить, как и прежде. Второго типа члены возникают, поскольку $\xi^\alpha_X(x)$ имеет индекс X. Эти члены включают производные, подобные

$$\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha_X(x)}{\partial X^\lambda \partial x^\mu} \right)_{x=X}. \tag{3.3.4}$$

Оказывается, что последние не имеют ничего общего с метрикой или аффинной связностью. Для того чтобы справиться с членами второго типа, необходимо более четко определить, что подразумевается под словами «локально-инерциальные» в формулировке принципа эквивалентности. В гл. 5 мы увидим, что первые производные метрического тензора могут быть измерены путем сравнения скоростей хода идентичных часов, расположенных бесконечно близко друг от друга. Тогда принцип эквивалентности можно понимать в том смысле, что *локально-инерциальные координаты* ξ^α_X, *которые мы вводим в данной точке* X, *могут быть выбраны так, что первые производные метрического тензора в точке* X *исчезают*. В системе координат ξ^α_X метрический тензор в точке X'

задается выражением (3.3.2) в виде

$$g^{X}_{\gamma\delta}(X') = \left(\frac{\partial\xi^{\alpha}_{X'}(x)}{\partial\xi^{\gamma}_{X}(x)}\,\frac{\partial\xi^{\beta}_{X'}(x)}{\partial\xi^{\delta}_{X}(x)}\,\eta_{\alpha\beta}\right)_{x=X'},$$

и наша новая интерпретация принципа эквивалентности говорит о том, что данная величина становится стационарной по X', когда X' совпадает с X. Для того чтобы использовать эту информацию, введем произвольную «лабораторную» систему координат x^{α} и запишем

$$g_{\mu\nu}(X') \equiv \left(\frac{\partial\xi^{\alpha}_{X'}(x)}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial\xi^{\beta}_{X'}(x)}{\partial x_{\nu}}\,\eta_{\alpha\beta}\right)_{x=X'} =$$

$$= g^{X}_{\gamma\delta}(X')\left(\frac{\partial\xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial\xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}}\right)_{x=X'}.$$

Продифференцировав это выражение по X'^{λ} и положив $X'=X$, находим [ввиду стационарности $g^{X}_{\gamma\delta}(X')$] следующее соотношение:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^{\lambda}} = g^{X}_{\gamma\delta}(X)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left\{\frac{\partial\xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial\xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}}\right\}\right)_{x=X} =$$

$$= \eta_{\gamma\delta}\left(\frac{\partial^2\xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial\xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial^2\xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}\right)_{x=X}.$$

Никаких производных, подобных (3.3.4), теперь не возникает, и можно использовать (3.3.2) и (3.3.3), как и прежде, чтобы показать справедливость соотношения

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^{\lambda}} = \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}(X)\,g_{\rho\nu}(X) + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}(X)\,g_{\rho\mu}(X),$$

совпадающего по форме с (3.3.1).

Возвратимся теперь к нашим предыдущим компактным обозначениям и найдем с помощью этих соотношений аффинную связность. Прибавим к (3.3.1) аналогичное соотношение с переставленными индексами μ и λ и вычтем аналогичное соотношение с переставленными ν и λ. В результате получим

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = g_{\varkappa\nu}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu} + g_{\varkappa\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\nu} +$$

$$+ g_{\varkappa\nu}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} + g_{\varkappa\lambda}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu} - g_{\varkappa\lambda}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\mu} - g_{\varkappa\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda} = 2g_{\varkappa\nu}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}. \qquad (3.3.5)$$

(Напомним, что $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ симметричны при перестановке μ и ν.) Определим матрицу $g^{\nu\sigma}$ как обратную к $g_{\nu\sigma}$, т. е.

$$g^{\nu\sigma}g_{\varkappa\nu} = \delta^{\sigma}_{\varkappa}. \qquad (3.3.6)$$

Умножив предыдущее выражение на $g^{\nu\sigma}$, в результате получим

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right\}. \tag{3.3.7}$$

Следует отметить, что (3.2.7) действительно обеспечивает существование обратного тензора, равного

$$g^{\nu\sigma} \equiv g^{\sigma\nu} \equiv \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}}, \tag{3.3.8}$$

ибо, используя известное правило умножения

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\gamma}_{\alpha},$$

находим

$$g^{\nu\sigma} g_{\varkappa\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial \xi^{\delta}}{\partial x^{\nu}} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma\alpha} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial x^{\varkappa}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\varkappa}} = \sigma^{\sigma}_{\varkappa},$$

что и совпадает с (3.3.6).] Иногда правую часть выражения (3.3.7) называют *символом Кристоффеля* и обозначают так:

$$\left\{ {\sigma \atop \lambda\mu} \right\}.$$

Одним из важных следствий соотношения между аффинной связностью и метрическим тензором является то, что уравнение движения свободно падающей частицы автоматически сохраняет форму собственного временного интервала $d\tau$. Используя (3.2.3), можно найти, что

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right\} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} +$$

$$+ g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} = \left[\frac{\partial g_{\varkappa\sigma}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\mu\sigma} \Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda} - g_{\nu\varkappa} \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} \right] \frac{dx^{\varkappa}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau}.$$

Учитывая затем (3.3.5), легко видеть, что эта величина исчезает следовательно,

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = -C, \tag{3.3.9}$$

где C — интеграл движения. Далее, поскольку мы выбрали начальные условия так, что $d\tau^2$ определяется (3.2.6), получаем $C = 1$, и равенство (3.3.9) гарантирует, что формула (3.2.6) применима вдоль всего пути частицы. Аналогично начальные условия для безмассовой частицы приводят к $C = 0$ (τ заменяется при этом неким другим параметром σ), и уравнения движения будут обеспечивать равенство нулю величины $g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$ вдоль всего пути.

Еще одним следствием соотношения (3.3.5) является возможность задавать теперь движение свободно падающих тел с помощью вариационного принципа. Введем произвольный параметр p, чтобы описать траекторию частицы, и будем определять собственное время, за которое частица падает из точки A в точку B, формулой

$$T_{BA}=\int_A^B \frac{d\tau}{dp}dp=\int_A^B \left\{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}\right\}^{1/2}dp.$$

Теперь перейдем от траектории $x^\mu(p)$ к $x^\mu(p)+\delta x^\mu(p)$, фиксируя ее конечные точки, т. е. полагая $\delta x^\mu=0$ в точках p_A и p_B. Тогда изменение T_{BA} равно

$$\delta T_{BA}=\frac{1}{2}\int_A^B \left\{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}\right\}^{-1/2}\times$$
$$\times\left\{-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\delta x^\lambda\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}-2g_{\mu\nu}\frac{d\delta x^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}\right\}dp.$$

Первый сомножитель под интегралом — это просто $dp/d\tau$, так что интеграл можно переписать следующим образом:

$$\delta T_{BA}=-\int_A^B \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\delta x^\lambda\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}+g_{\mu\nu}\frac{d\delta x^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right\}d\tau.$$

Проинтегрировав по частям, пренебрежем вкладом конечных точек, поскольку δx^μ обращается в нуль в A и B. При этом

$$\delta T_{BA}=-\int_A^B \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}-\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}-g_{\lambda\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\lambda\, d\tau.$$

Используя соотношение (3.3.5) и учитывая, что $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ симметрична по нижним индексам, находим

$$\delta T_{BA}=-\int_A^B \left\{\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right\}g_{\lambda\nu}\,\delta x^\lambda\, d\tau. \qquad (3.3.10)$$

Следовательно, мировая линия частицы в пространстве-времени, определяемая уравнениями свободного падения (3.2.3), будет такова, что затраченное собственное время окажется экстремальным (обычно минимальным), т. е.

$$\delta T_{BA}=0.$$

Таким образом, мы можем интерпретировать уравнение движения (3.2.3) геометрически, считая, что частица, находящаяся в свобод-

ном падении в кривом пространстве-времени, называемом гравитационным полем, будет двигаться по кратчайшему (или самому длинному) из возможных путей между двумя точками; «длина» при этом измеряется собственным временем. Такие пути называют *геодезическими*. Например, можно считать, что Солнце искривляет пространство-время так, как большой груз искривляет резиновую пленку, и потому путь кометы, движущейся относительно Солнца, является «кратчайшим» из возможных. Однако такая геометрическая аналогия привлекается *после* решений уравнений движения, получаемых с помощью принципа эквивалентности, и не обязательна в нашем рассмотрении.

§ 4. Ньютоновское приближение

Чтобы найти связь с ньютоновской теорией, рассмотрим частицу, медленно движущуюся в слабом стационарном гравитационном поле. Если частица достаточно медленная, можно пренебречь $dx/d\tau$ по сравнению с $dt/d\tau$ и записать (3.2.3) в виде

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=0.$$

Так как поле стационарно, все временные производные $g_{\mu\nu}$ исчезают и, следовательно,

$$\Gamma^\mu_{00}=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

А если поле еще и слабое, можно ввести почти декартову систему координат, в которой

$$g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta},\quad |h_{\alpha\beta}|\ll 1. \tag{3.4.1}$$

Таким образом, в первом порядке по $h_{\alpha\beta}$ находим

$$\Gamma^\alpha_{00}=-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}.$$

Подставляя это выражение аффинной связности в уравнения движения, получаем

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\nabla h_{00},$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2}=0.$$

Решение второго уравнения: $dt/d\tau=\text{const}$ (что можно увидеть, вычисляя $d\tau$ в пренебрежении $h_{\alpha\beta}$); поэтому, разделив уравнение с $d^2\mathbf{x}/d\tau^2$ на $(dt/d\tau)^2$, находим

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=\frac{1}{2}\nabla h_{00}. \tag{3.4.2}$$