ном падении в кривом пространстве-времени, называемом гравитационным полем, будет двигаться по кратчайшему (или самому длинному) из возможных путей между двумя точками; «длина» при этом измеряется собственным временем. Такие пути называют *геодезическими*. Например, можно считать, что Солнце искривляет пространство-время так, как большой груз искривляет резиновую пленку, и потому путь кометы, движущейся относительно Солнца, является «кратчайшим» из возможных. Однако такая геометрическая аналогия привлекается *после* решений уравнений движения, получаемых с помощью принципа эквивалентности, и не обязательна в нашем рассмотрении.

§ 4. Ньютоновское приближение

Чтобы найти связь с ньютоновской теорией, рассмотрим частицу, медленно движущуюся в слабом стационарном гравитационном поле. Если частица достаточно медленная, можно пренебречь $dx/d\tau$ по сравнению с $dt/d\tau$ и записать (3.2.3) в виде

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=0.$$

Так как поле стационарно, все временные производные $g_{\mu\nu}$ исчезают и, следовательно,

$$\Gamma^\mu_{00}=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

А если поле еще и слабое, можно ввести почти декартову систему координат, в которой

$$g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta},\quad |h_{\alpha\beta}|\ll 1. \tag{3.4.1}$$

Таким образом, в первом порядке по $h_{\alpha\beta}$ находим

$$\Gamma^\alpha_{00}=-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}.$$

Подставляя это выражение аффинной связности в уравнения движения, получаем

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\nabla h_{00},$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2}=0.$$

Решение второго уравнения: $dt/d\tau=\text{const}$ (что можно увидеть, вычисляя $d\tau$ в пренебрежении $h_{\alpha\beta}$); поэтому, разделив уравнение с $d^2\mathbf{x}/d\tau^2$ на $(dt/d\tau)^2$, находим

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=\frac{1}{2}\nabla h_{00}. \tag{3.4.2}$$

Соответствующий ньютоновский результат выглядит так:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi, \tag{3.4.3}$$

где ϕ — гравитационный потенциал, который на расстоянии r от центра сферического тела массы M имеет вид

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \tag{3.4.4}$$

Сравнивая (3.4.2) с (3.4.3), приходим к заключению, что

$$h_{00} = -2\phi + \text{const}.$$

Кроме того, на больших расстояниях система координат должна переходить в систему Минковского, так что h_{00} исчезает на бесконечности, а если мы потребуем, чтобы и ϕ исчезало на бесконечности [как (3.4.4)], то константа здесь будет равняться нулю. Таким образом, $h_{00} = -2\phi$, и, возвращаясь к метрике (3.4.1), получаем

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \tag{3.4.5}$$

Гравитационный потенциал имеет порядок 10^{-39} на поверхности протона, 10^{-9} — на поверхности Земли, 10^{-6} — на поверхности Солнца и 10^{-4} — на поверхности звезды типа белый карлик. Отсюда следует, что искривление в $g_{\mu\nu}$, вызываемое гравитацией, вообще говоря, очень невелико. (В системе СГС ϕ имеет размерность квадрата скорости; в наших единицах ϕ соответствует значению в единицах СГС, деленному на квадрат скорости света в единицах СГС.)

§ 5. Изменение масштаба времени

Рассмотрим часы, движущиеся с произвольной скоростью в произвольном гравитационном поле и не обязательно свободно падающие. Принцип эквивалентности говорит нам, что гравитационное поле не будет влиять на скорость их хода, если мы наблюдаем часы в локально-инерциальной системе координат ξ^α. Тогда, согласно § 2 гл. 2, пространственно-временной интервал $d\xi^\alpha$ между двумя отсчетами, даваемыми часами, подчиняется в этой системе соотношению

$$\Delta t = (-\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta)^{1/2},$$

где Δt — период между этими отсчетами, когда часы находятся в покое в отсутствие гравитации. Следовательно, в любой произвольной системе координат пространственно-временной интервал между отсчетами определяется формулой

$$\Delta t = \left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, dx^\mu \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\, dx^\nu\right)^{1/2}.$$