

Соответствующий ньютоновский результат выглядит так:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi, \quad (3.4.3)$$

где ϕ — гравитационный потенциал, который на расстоянии r от центра сферического тела массы M имеет вид

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (3.4.4)$$

Сравнивая (3.4.2) с (3.4.3), приходим к заключению, что

$$h_{00} = -2\phi + \text{const.}$$

Кроме того, на больших расстояниях система координат должна переходить в систему Минковского, так что h_{00} исчезает на бесконечности, а если мы потребуем, чтобы и ϕ исчезало на бесконечности [как (3.4.4)], то константа здесь будет равняться нулю. Таким образом, $h_{00} = -2\phi$, и, возвращаясь к метрике (3.4.1), получаем

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (3.4.5)$$

Гравитационный потенциал имеет порядок 10^{-39} на поверхности протона, 10^{-9} — на поверхности Земли, 10^{-6} — на поверхности Солнца и 10^{-4} — на поверхности звезды типа белый карлик. Отсюда следует, что искривление в $g_{\mu\nu}$, вызываемое гравитацией, вообще говоря, очень невелико. (В системе СГС ϕ имеет размерность квадрата скорости; в наших единицах ϕ соответствует значению в единицах СГС, деленному на квадрат скорости света в единицах СГС.)

§ 5. Изменение масштаба времени

Рассмотрим часы, движущиеся с произвольной скоростью в произвольном гравитационном поле и не обязательно свободно падающие. Принцип эквивалентности говорит нам, что гравитационное поле не будет влиять на скорость их хода, если мы наблюдаем часы в локально-инерциальной системе координат ξ^α . Тогда, согласно § 2 гл. 2, пространственно-временной интервал $d\xi^\alpha$ между двумя отсчетами, даваемыми часами, подчиняется в этой системе соотношению

$$\Delta t = (-\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta)^{1/2},$$

где Δt — период между этими отсчетами, когда часы находятся в покое в отсутствие гравитации. Следовательно, в любой произвольной системе координат пространственно-временной интервал между отсчетами определяется формулой

$$\Delta t = \left(-\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \right)^{1/2}.$$

Вводя метрический тензор, переписываем эту формулу так

$$\Delta t = (-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}.$$

Поскольку скорость часов — это dx^μ/dt , интервал времени dt между отсчетами определяется соотношением

$$\frac{dt}{\Delta t} = \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{-1/2}. \quad (3.5.1)$$

В частности, если часы покоятся, получаем

$$\frac{dt}{\Delta t} = (-g_{00})^{-1/2}. \quad (3.5.2)$$

Мы не можем наблюдать коэффициентов изменения масштаба времени, появляющихся в (3.5.1) и (3.5.2), просто путем измерения временного интервала dt между двумя отсчетами и сравнения его затем со значением Δt , задаваемым изготовителем часов. Дело в том, что гравитационное поле воздействует на временные стандарты точно таким же образом, как и на изучаемые часы. Следовательно, если наши стандартные часы показывают, что некоторый физический процесс протекает за одну секунду в покое в отсутствие гравитации, то мы можем также утверждать, что он занимает одну секунду и при наличии гравитации, поскольку поле воздействует одинаковым образом и на часы и на процесс. Однако мы можем сравнивать коэффициенты изменения масштаба времени в двух различных точках поля. Предположим, например, что в точке 1 мы наблюдаем свет, пришедший из точки 2, где он возник в результате некоторого атомного перехода. Если в постоянном гравитационном поле точки 1 и 2 покоятся, то время, необходимое, чтобы волновой импульс, вышедший из точки 1, достиг точки 2, есть величина, определяемая интегралом (3.2.10) по данному пути. Следовательно, время между прибытием в точку 1 двух последовательных импульсов будет связано с временем между их выходами из точки 2, согласно формуле (3.5.2), следующим образом:

$$dt_2 = \Delta t (-g_{00}(x_2))^{-1/2}.$$

Если аналогичный атомный переход происходит и в точке 1, то время, разделяющее прибытия импульсов световых волн, измеряемые в точке 1, равняется

$$dt_1 = \Delta t (-g_{00}(x_1))^{-1/2}.$$

Таким образом, для данного атомного перехода отношение частот (наблюданное в точке 1) света, идущего из точки 2, и света, выходящего из точки 1, равно

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{\rho_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)} \right)^{1/2}. \quad (3.5.3)$$

В предельном случае слабого поля имеем $g_{00} \approx -1 - 2\phi$ и $\phi \ll 1$, так что $v_2/v_1 = 1 + \Delta v/v$, где

$$\frac{\Delta v}{v} = \phi(x_2) - \phi(x_1). \quad (3.5.4)$$

(Для однородного гравитационного поля этот результат можно было бы получить непосредственно из принципа эквивалентности без введения метрики или аффинной связности.)

Применим соотношение (3.5.4) к случаю, когда свет, испускаемый поверхностью Солнца, наблюдается на Земле. Гравитационный потенциал Солнца можно вычислить по формуле

$$\phi_{\odot} = \frac{-GM_{\odot}}{R_{\odot}},$$

где M_{\odot} и R_{\odot} — масса и радиус Солнца

$$M_{\odot} = 1,97 \cdot 10^{33} \text{ г},$$

$$R_{\odot} = 0,695 \cdot 10^6 \text{ км},$$

а G — гравитационная постоянная

$$G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ эрг} \cdot \text{см}/\text{г}^2 = 7,41 \cdot 10^{-29} \text{ см}/\text{г}, \quad (3.5.5)$$

(здесь, как мы условились, $c = 1$, а потому одна секунда равна $3 \cdot 10^{10}$ см; в единицах СГС величина $7,41 \cdot 10^{-29}$ см/г соответствует G/c^2). Отсюда находим, что потенциал на поверхности Солнца равен

$$\phi_{\odot} = -2,12 \cdot 10^{-6}.$$

По сравнению с ϕ_{\odot} гравитационным потенциалом Земли можно пренебречь. В этом случае частота света, приходящего от Солнца, будет смещаться в сторону красной части спектра на $2,12 \cdot 10^{-6}$ по сравнению с частотой света, испускаемого атомами на Земле.

Трудность в измерении гравитационного красного смещения солнечного света можно оценить, вспомнив, что движение источника со скоростью v вдоль оси Земля — Солнце приведет к дополнительному доплеровскому сдвигу частоты $\Delta v/v = v$ [см. выражение (2.2.2)], и, следовательно, доплеровский сдвиг сравняется с гравитационным красным смещением уже при скорости $2 \cdot 10^{-6}$, или, в единицах СГС, при $v = 0,6$ км/с. Вращение Земли или Солнца не создает здесь никаких сложностей; это известные эффекты, которые легко учесть. Тепловые эффекты более серьезны; при температуре 3000 К тепловая скорость распространенных легких элементов (C, N, O) равняется примерно 2 км/с, что дает доплеровское уширение, в три раза большее, чем ожидаемое гравитационное красное смещение. Однако тепловое движение только уширяет линии, но не сдвигает их, так что с этой трудностью

тоже можно справиться. Действительно большие неприятности вызывают неизвестные доплеровские сдвиги, возникающие из-за конвекции газов в солнечной атмосфере. Фактически оказывается, что наблюдаемый сдвиг частоты изменяется от места к месту на солнечном диске и иногда происходит даже в сторону голубой части спектра! Конвекция обычно бывает вертикальной, так что мы можем максимально уменьшить доплеровские сдвиги, наблюдая за периферией солнечного диска, где движение происходит главным образом под прямым углом к линии наблюдения. До недавнего времени наилучший результат, достигнутый таким способом,— это гравитационное красное смещение солнечного света порядка $2 \cdot 10^{-6}$ [2]¹⁾. В последние несколько лет была улучшена аппаратура [4, 5], что привело к гораздо более точному определению значения красного смещения: $1,05 \pm 0,05$ от предсказанной величины. Однако еще рано говорить, что этот результат решает вопрос, по крайней мере до тех пор, пока он не будет подтвержден.

Красное смещение намного больше для звезд типа белый карлик, подобных Сириусу В и 40 Эридан В. Такие звезды обычно имеют массы порядка одной солнечной массы и радиусы порядка от $1/10$ до $1/100$ от радиуса Солнца. Таким образом, красное смещение спектральных линий света, испускаемого их поверхностями, от 10 до 100 раз больше, чем для Солнца, или составляет приближенно 10^{-4} или 10^{-5} . Хотя это облегчает задачу отделения эффекта от доплеровских сдвигов, возникающих из-за конвекции или неоднородностей температуры и давления, мы сталкиваемся с новой трудностью: незнанием точного значения гравитационного потенциала Φ , с которым надо сравнивать измеряемое значение $\Delta v/v$. Если известна масса белого карлика, можно грубо оценить величину его радиуса и гравитационного потенциала на его поверхности с помощью астрофизической теории [6]. Однако массы белых карликов могут быть измерены только в том случае, если они являются партнерами в двойных звездных системах. Например, масса Сириуса В определяется путем вычисления полной массы Сириуса А и В, исходя из расстояния между ними и периода их вращения, и вычитания затем массы Сириуса А, вычисленной по теории звезд. Однако рассеяние света, испускаемого Сириусом А, атмосферой Сириуса В приводит к тому, что гравитационное красное смещение света от Сириуса В весьма трудно измерить²⁾. В системе двойной звезды 40 Эридан В возникает другая трудность. 40 Эридан В находится довольно далеко от 40 Эридан А,

¹⁾ Обзор и ссылки на более ранние работы см. в [3].

²⁾ Спектроскопическое исследование Сириуса В, предпринятое недавно [19], дало для бесразмерного поверхностного гравитационного потенциала величину $(2,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}$ и величину $(3,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-4}$ для относительного красного смещения.

и не возникает никакой проблемы с рассеянием света, а массу 40 Эридан В можно определить независимо от А путем установления положения их центра масс в дополнение к измерению периода их вращения и расстояния между ними. Однако, поскольку 40 Эридан В и А очень удалены друг от друга, период их вращения весьма велик и еще не прошло достаточное время, чтобы определить массу В с очень высокой точностью. Наилучшее предсказываемое значение поверхностного гравитационного потенциала — это $\phi = -(5,7 \pm 1) \cdot 10^{-5}$, что находится в хорошем согласии с наблюдаемым [7]¹⁾ красным смещением $\Delta v/v = -(7 \pm 1) \cdot 10^{-5}$. Если учесть расщепление Штарка в спектре 40 Эридан В, согласие улучшается [9].

Эмпирические данные по красному смещению, предсказываемому принципом эквивалентности, были значительно улучшены в 1960 г. в земных экспериментах, проведенных Паундом и Ребкой [10]. Они предоставили фотону, испускаемому в переходе 14,4 кэВ (0,1 мкс) атомом Fe⁵⁷, падать 22,6 м и наблюдали его резонансное поглощение мишенью из того же Fe⁵⁷. (В обычных условиях *резонансное* поглощение такой узкой линии невозможно, поскольку отдача излучающего ядра уменьшает энергию фотона, делая ее меньшей разности энергий уровней, тогда как для того, чтобы произошел обратный переход в ядре мишени, которое также испытывает отдачу, необходим квант с энергией, немного большей, чем разность энергий уровней. Этот эксперимент стал возможен благодаря эффекту Мёссбауэра [11], в котором импульсы отдачи при испускании и поглощении воспринимаются всем кристаллом, так что в этих актах энергия почти не теряется.) Разность значений гравитационного потенциала наверху, у источника, и внизу, у мишени, равняется

$$\Delta\phi = \phi_{\text{источ}} - \phi_{\text{мишень}} = -\frac{(980 \text{ см}/\text{с}^2)(2260 \text{ см})}{(3 \cdot 10^{10} \text{ см}/\text{с})^2} = -2,46 \cdot 10^{-15}.$$

Если принцип эквивалентности справедлив, мы должны ожидать, что частота фотона, падающего на мишень, будет сдвинута на величину $\Delta v/v = -\Delta\phi$, что уменьшает скорость счета на коэффициент

$$C = \frac{\Gamma^2}{\Delta v^2 + \Gamma^2},$$

где Γ — полная ширина линии на половине ее высоты. (Отметим, что в формулу входит Γ , а не $\Gamma/2$, так как приходится объединять коэффициент испускания, пропорциональный $[(v + \Delta v)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$, с коэффициентом поглощения, пропорциональным $[v^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$.)

¹⁾ По поводу других белых карликов см. [8].

Но в этом переходе относительная ширина равнялась $\Gamma/v = 1,13 \cdot 10^{-12}$, которая была больше, чем предсказываемое отношение $\Delta v/v$, в 460 раз, так что уменьшение скорости счета было только $1 : 2,1 \cdot 10^5$! Казалось бы, это делало эксперимент невозможным; и действительно, Паунд и Ребка сначала думали, что для того чтобы сдвиг Δv становился сравнимым с Γ , фотонам должны падать несколько километров. К счастью, они придумали одну хитрость, позволившую им измерять очень малые сдвиги частот. Идея их состояла в том, что источник фотонов двигался вверх и вниз со скоростью $v_0 \cos \omega t$, где ω было некоторой произвольной фиксированной частотой (10—50 Гц), а v_0 было также произвольным, но намного превышающим $-\Delta\phi$, т. е. много большим, чем $7,4 \cdot 10^{-5}$ см/с. В этом случае гравитационное фиолетовое смещение Δv_G добавляется к превышающему его доплеровскому сдвигу $\Delta v_D/v = -v_0 \cos \omega t$ (см. § 2 гл. 2), и скорость счета умножается на коэффициент, зависящий от времени,

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{\Gamma^2}{(\Delta v_{ri} + \Delta v_D)^2 + \Gamma^2} = \frac{\left(\frac{\Gamma}{v}\right)^2}{\left(\frac{\Delta v_G}{v} - v_0 \cos \omega t\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{v}\right)^2} \approx \\ &\approx \frac{\left(\frac{\Gamma}{v}\right)^2}{v_0^2 \cos^2 \omega t + \left(\frac{\Gamma}{v}\right)^2} \left\{ 1 + \frac{2 \frac{\Delta v_G}{v} v_0 \cos \omega t}{v_0^2 \cos^2 \omega t + \left(\frac{\Gamma}{v}\right)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда Δv_G можно выделить, измеряя член, линейный по $\cos \omega t$, например измеряя асимметрию между числом регистраций при движении источника вверх (например, когда $\cos \omega t > 1/\sqrt{2}$) и числом регистраций, когда источник движется вниз (когда $\cos \omega t < -1/\sqrt{2}$). Таким способом Паунд и Ребка получили значение $\Delta v_G/v$, приблизительно в 4 раза большее, чем ожидаемое значение $2,46 \cdot 10^{-15}$. Это расхождение было явно внутренним сдвигом частоты из-за различия состояний кристаллов источника и мишени (включая разность их температур) и было удалено вычитанием асимметрии в счете фотонов, когда источник находился ниже мишени, из асимметрии, возникающей, когда мишень находилась ниже источника. Окончательный результат для гравитационного смещения частоты был: $\Delta v/v = (2,57 \pm 0,26) \cdot 10^{-15}$ в блестящем согласии с предсказанным значением $2,46 \cdot 10^{-15}$. Соответствие с тех пор улучшено, и в настоящее время результаты совпадают с точностью около 1% [12].

Сделаны также предложения [13] по измерению гравитационного красного смещения света, приходящего от искусственного спутника. В точке, расположенной как раз под перигеем, не будет возникать никаких доплеровских эффектов первого порядка, так

как время, за которое свет достигает точки наблюдения, в данном случае на мгновение становится постоянным. Тогда сдвиг частоты испускаемого спутником света должен определяться по формуле (3.5.1), в то время как сдвиг частоты наших лабораторных временных стандартов может быть вычислен с помощью формулы (3.5.2), если мы пренебрежем вращением Земли. Из этого следует, что частота v_s данной атомной линии, испускаемой спутником, будет связана с частотой v_e этой же линии на Земле отношением

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{\left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)_s^{1/2}}{(-g_{00})_{\oplus}^{1/2}}. \quad (3.5.6)$$

Скорость v_s спутника определяется, исходя из формулы

$$v_s^2 = -\phi_s = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + H},$$

где H — высота спутника в перигее, а M_\oplus и R_\oplus — масса и радиус Земли

$$M_\oplus = 5,983 \cdot 10^{27} \text{ г}, \quad R_\oplus = 6,371 \cdot 10^8 \text{ см}.$$

В приближении слабых полей имеем

$$\left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)_s \approx -(g_{00})_s - v_s^2 = 1 + 2\phi_s - v_s^2 \approx 1 - \frac{3GM_\oplus}{R_\oplus + H},$$

и

$$(-g_{00})_{\oplus} \approx 1 + 2\phi_\oplus \approx 1 - \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus},$$

так что в этом приближении выражение (3.5.6) приводит к следующему отношению частот: $v_s/v_e = 1 + \Delta v/v$, где

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{3}{2} \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + H} + \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} \approx -3,47 \cdot 10^{-10} \left\{ \frac{3R_\oplus}{R_\oplus + H} - 2 \right\}.$$

Мы видим, что при малых высотах имеется красное смещение, обусловленное своим происхождением только специальной теории относительности (см. § 2 гл. 2), с которым складывается при больших высотах фиолетовое смещение (возникающее в общей теории относительности), что приводит в итоге к красному смещению для $H < R_\oplus/2$ и к фиолетовому смещению для $H > R_\oplus/2$.

В данном случае гравитационное красное смещение света, приходящего из места с меньшим значением гравитационного потенциала, чем в точке наблюдения, может в некоторой степени восприниматься как следствие квантовой теории, закона сохранения энергии и «слабого» принципа эквивалентности. Если фотон испускается в точке I каким-нибудь тяжелым перелятивистским прибором, наблюдатель в локально-инерциальной системе координат,

движущейся вместе с этим прибором, обнаружит, что внутренняя энергия этого прибора и, следовательно, его инертная масса изменяются на величину, связанную с частотой фотона v_1 , следующим образом:

$$\Delta m_1 = -hv_1,$$

где h есть постоянная Планка: $h = 6,625 \cdot 10^{-27}$ эрг·с. Предположим, что фотон затем поглощается в точке 2 другим массивным прибором; тогда наблюдатель в свободно падающей системе отсчета обнаружит, что инертная масса прибора изменяется на величину, связанную с частотой фотона v_2 , следующим образом:

$$\Delta m_2 = hv_2.$$

Однако сумма полной инертной массы и гравитационной потенциальной энергии двух частей этой установки должна быть одной и той же и до и после этих событий, так что

$$\Delta m_1 + \phi_1 \Delta m_1 + \Delta m_2 + \phi_2 \Delta m_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1 + \phi_1}{1 + \phi_2} \approx 1 + \phi_1 - \phi_2$$

в согласии с предыдущим результатом. (Неважно, измеряются ли частоты фотонов в локально-инерциальных системах или в неинерциальных, поскольку гравитационное поле и в любой другой системе отсчета будет воздействовать на скорость хода стандартных часов наблюдателя точно таким же образом, как оно действует на частоту v .) Этот результат можно описать, говоря, что фотон в гравитационном поле обладает «кинетической энергией» hv и «потенциальной энергией» $h\nu\phi$ и их сумма остается постоянной. Однако мы намеренно рассматривали в предыдущих вычислениях нерелятивистский источник и поглотитель, так как понятие гравитационной потенциальной энергии фотона в противном случае теряет смысл.

Полученные результаты основываются на принципе эквивалентности в двух отношениях. Предполагается, что изменения гравитационной массы приборов равны изменениям их инертных масс и, следовательно, их внутренней энергии. Предполагается также, что соотношение между энергией фотона и частотой в свободно падающей системе отсчета не изменяется при наличии гравитационных полей. Поэтому даже если мы предположим, что эксперименты Этвеша — Дикке могут быть улучшены до неограниченной точности и что гравитационная масса будет найдена в точности равной инертной массе, все же имеет смысл рассматривать гравитационное красное смещение спектральных линий как независимую проверку принципа эквивалентности.