§ 6. Знаки времени

Связь метрики Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ и метрического тензора $g_{\mu\nu}$ теории гравитации может быть записана в матричной форме:

$$g = D^T \eta D. \tag{3.6.1}$$

Под g будем подразумевать в этом параграфе матрицу размера 4×4 (не детерминант), чьи элементы суть $g_{\mu\nu}$; η — матрица с элементами $\eta_{\alpha\beta}$; D — матрица определяемая, как

$$D_{\alpha\mu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}, \tag{3.6.2}$$

а транспонированная матрица D^T равна

$$D^T_{\mu\alpha} \equiv D_{\alpha\mu}.$$

Ранее мы, специально не оговаривая, предполагали как часть принципа эквивалентности, что преобразование от лабораторных координат x^μ к локально-инерциальным координатам ξ^α несингулярно: ξ^α — дифференцируемая функция x^μ, а x^μ — дифференцируемая функция ξ^α. Из этого следует, что существует матрица

$$D^{-1}_{\mu\alpha} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}, \tag{3.6.3}$$

обратная к D, т. е.

$$(D^{-1}D)_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu,$$

так что D должно иметь неисчезающий определитель

$$\operatorname{Det} D \neq 0. \tag{3.6.4}$$

Преобразование типа (3.6.1) при отличающемся от нуля определителе D называется *конгруэнцией*.

Тот факт, что $g_{\mu\nu}$ связано с $\eta_{\alpha\beta}$ конгруэнцией (3.6.1), не означает, что собственные значения $g_{\mu\nu}$ те же самые, что у $\eta_{\alpha\beta}$, как было бы в случае преобразования подобия. (Действительно, *нельзя* составить никаких инвариантных функций из компонент метрического тензора, хотя можно составить инвариантные функции из $g_{\mu\nu}$ и его производных, как будет показано в гл. 6.) Однако существует теорема, известная как *закон инерции Сильвестра* (см., например, [14]), которая утверждает, что *числа* собственных значений, положительных, отрицательных и нулевых, не изменяются при конгруэнтных преобразованиях. Отсюда вывод: метриче-

ский тензор $g_{\mu\nu}$ должен аналогично $\eta_{\alpha\beta}$ иметь три положительных собственных значения, одно отрицательное и ни одного собственного значения, равного нулю. Это свойство метрики отличает наше (3 + 1)-мерное пространство-время от 4-мерного или от (2 + 2)-мерного пространства-времени, или каких-либо еще более «плохих» метрик.

§ 7. Относительность и анизотропия инерции

В § 3 гл. 1 мы уже видели, что Ньютон и Мах по-разному смотрели на проблему происхождения инерции. Ньютон полагал, что инерциальные силы, такие, как центробежные, должны возникать из-за ускорения относительно «абсолютного пространства», в то время как Мах считал более вероятным, что инерциальные силы порождаются общей массой небесных тел. Отличие утверждений не метафизическое, а физическое, поскольку если бы Мах был прав, то большая масса могла бы вызывать малые изменения инерциальных сил вблизи нее, если же Ньютон был бы прав, такие эффекты не возникали бы.

Эйнштейн считал себя последователем Маха, но в действительности разрешение этой проблемы на основе принципа эквивалетности находится где-то между точками зрения Ньютона и Маха. Инерциальные системы отсчета, т. е. «свободно падающие системы координат», действительно определяются локальным гравитационным полем, которое создается всей материей Вселенной, ее частями, расположенными далеко и близко. Однако в инерциальной системе отсчета на законы движения [такие, как (2.3.1)] присутствие масс вблизи уже не влияет ни гравитационным, ни каким-либо другим путем. Например, масса Солнца определяет движение свободно падающей Земли, но как только мы связали нашу систему отсчета с Землей, мы не можем обнаружить гравитационное поле Солнца, что демонстрирует с большой точностью эксперимент Дикке. (Вспомним § 2 гл. 1. В действительности, из-за того, что Земля не является бесконечно малым объектом, мы можем наблюдать поле Солнца благодаря эффектам приливов, как это обсуждалось уже в § 1 гл. 3.) Небесные тела фигурируют здесь потому, что уравнения гравитационного поля нуждаются в граничных условиях на бесконечности, а последние задаются требованием, чтобы на больших расстояниях от Солнца $g_{\mu\nu}$ переходило в космическое гравитационное поле, создаваемое всей массой Вселенной. Мы не будем пока вникать в детали уравнений поля и космологии, однако можно ожидать, что гравитационное поле, создаваемое массой Солнца и этими космологическими граничными условиями, таково, что орбиты планет, проходящие далеко от Солнца, не прецессируют относительно реперных звезд; последнее согласуется с наблюдениями (см. § 1 гл. 15).