В математике он был более велик,
Чем Тихо Браге или Эрра Патер:
Геометрическим масштабом
Для него мог служить объем кружки эля
Легко расправлялся с синусами и танген
сами,
Когда хотел взвесить хлеб или масло,
И мудро вычислял по правилам алгебры
какой час дня бьют его часы.

С. Батлер,

Сэр Гудибрас, его последнее слово

Глава 4
ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Мы уже отмечали, что принцип эквивалентности гравитации и инерции вскрывает глубокую аналогию между неевклидовой геометрией и теорией гравитации. В этой главе кратко изложен аппарат, общий для них обоих,— тензорный анализ.

§ 1. Принцип общей ковариантности

В последней главе мы использовали один из способов применения принципа эквивалентности, чтобы ввести эффект гравитации в физических системах. При этом мы записывали уравнения, установленные для произвольных гравитационных полей, в локально-инерциальных системах координат (т. е. уравнения специальной теории относительности, такие, как $d^2\xi^\alpha/d\tau^2 = 0$), а затем делали преобразования координат, чтобы найти соответствующие уравнения в лабораторной системе координат. Можно использовать и далее этот метод, но он приведет нас к весьма утомительным вычислениям, когда мы доберемся до уравнений поля в электродинамике и гравитации.

Поэтому мы разовьем другой подход, который имеет то же физическое содержание, но намного элегантнее в обозначениях и удобнее в обращении. Этот подход вытекает из альтернативной версии принципа эквивалентности, известной как *принцип общей ковариантности.* Он утверждает, что физическое уравнение задано в произвольном гравитационном поле в том случае, когда выполняются два условия:

1) уравнение задано в отсутствие гравитации, т. е. оно соответствует законам СТО, когда метрический тензор в нем $g_{\alpha\beta}$ равняется тензору Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ и аффинная связность $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ исчезает;

2) уравнение общековариантно, т. е. оно сохраняет свою форму при произвольном преобразовании координат $x \to x'$.

Чтобы убедиться в том, что принцип общей ковариантности вытекает из принципа эквивалентности, предположим, что мы находимся в произвольном гравитационном поле, и рассмотрим какое-нибудь уравнение, удовлетворяющее двум вышеуказанным условиям. Согласно условию 2, мы знаем, что это уравнение справедливо во всех системах координат, если оно справедливо в какой-либо системе координат. Но в любой данной точке имеется класс систем координат, локально-инерциальных систем, в которых эффекты гравитации отсутствуют. Условие 1 тогда говорит нам, что наше уравнение справедливо в этих системах и, следовательно, во всех других системах координат.

Следует подчеркнуть, что общая ковариантность сама по себе не имеет физического содержания [1]. Любое уравнение может быть *сделано* общековариантным, если записать его в какой-либо одной системе координат, а затем придать ему форму, не изменяющуюся при переходе в любую другую систему. Действительно, уже со школьной скамьи нам становится привычной запись физических уравнений в недекартовых системах координат, таких, как полярные координаты, и в неинерциальных системах, таких, как вращающиеся системы отсчета. Смысл принципа общей ковариантности применительно к эффектам гравитации состоит в том, что физическое уравнение благодаря его общей ковариантности будет справедливо в гравитационном поле, если оно справедливо в его отсутствие. Смысл общей ковариантности легче понять, если сравнить ее с лоренцевой инвариантностью. Так же как любое уравнение можно записать в общековариантном виде, так и любое уравнение можно сделать лоренц-инвариантным, если записать его в какой-либо одной системе координат, а затем придать ему форму, не изменяющуюся при лоренцевых преобразованиях. Однако, если мы проделаем это с нерелятивистским уравнением, например с ньютоновским вторым законом, то обнаружится, что после того как мы сделаем его лоренц-инвариантным, в нем появится новая величина, которая, естественно, является скоростью введенной системы отсчета относительно первоначальной системы. Требование, чтобы эта скорость *не* появлялась в преобразованном уравнении, и составляет то, что мы называем принципом специальной относительности, или, для краткости, «лоренц-инвариантностью», и это требование накладывает очень жесткие ограничения на первоначальное уравнение. Подобно этому, когда мы придаем уравнению общековариантную форму, в него входят новые величины: метрический тензор $g_{\mu\nu}$ и аффинная связность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Отличие состоит в том, что в данном случае не требуется, чтобы названные величины в итоге исчезали, и, следовательно, не возникает никаких ограничений на уравнение, с которого мы начинали; наоборот, мы пользуемся существованием $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ для введения гравитационных полей. Сформулируем это кратко: принцип общей ковариантности не является принципом инвариантности, подобно принципу Галилея или специальной относительности, а есть лишь некое утверждение об эффектах гравитации и ни о чем больше. В частности, общековариантность не предполагает лоренц-инвариантности. Имеются общековариантные теории гравитации, позволяющие вводить инерциальные системы отсчета в любой точке гравитационного поля, но инвариантные относительно преобразования Галилея, а не относительно преобразования Лоренца в этих системах отсчета [2].

Любой физический принцип, такой, как общековариантность, который принимает форму принципа инвариантности, но содержание которого накладывает явное ограничение только на взаимодействия какого-нибудь конкретного поля, называется *динамической симметрией* [3]. Существуют другие динамические симметрии, имеющие большое значение в физике, такие, как локальная калибровочная инвариантность, управляющая взаимодействиями электромагнитного поля, или киральная симметрия [1]), управляющая взаимодействиями пионного поля. Мы будем не раз возвращаться к аналогии между общей теорией относительности и электродинамикой.

Принцип общей ковариантности применим только в масштабах, малых по сравнению с пространственно-временными размерами, типичными для гравитационного поля, так как только в малых областях можно, руководствуясь принципом эквивалентности, находить системы координат, в которых отсутствуют эффекты гравитации. Например, радиус Луны ненамного меньше, чем расстояние между Луной и Землей, так что мы не можем точно вычислить движение Луны, находя общековариантные уравнения, которые сводятся к точным уравнениям для свободного движения Луны в отсутствие гравитации. Мы можем, однако, рассматривать Луну как каменный шар и вычислять ее движение, применяя принцип общей ковариантности для определения гравитационного воздействия на каждый бесконечно малый элемент массы Луны. Вообще говоря, существует много общековариантных уравнений, которые сводятся к данному уравнению специальной теории относительности в отсутствие гравитации. Однако, поскольку принцип общей ковариантности применим только к малым масштабам по сравнению с масштабом гравитационного поля, мы вправе ожидать, что только $g_{\mu\nu}$ и его первые производные войдут в наши общековариантные уравнения. В этой и следующей главах мы увидим, что принцип общей ковариантности приводит к однозначным выводам относительно воздействия гравитационных полей на любую систему или часть системы, если они достаточно малы.

[1]) По поводу такого подхода к киральной симметрии см., например, [4].