§ 2. Векторы и тензоры

Для того чтобы построить физические уравнения, инвариантные при произвольных преобразованиях координат, мы должны знать, как ведут себя при этих преобразованиях величины, стоящие в уравнениях. Для некоторых величин, тех, что определяются непосредственно через дифференциалы от координат, трансформационные свойства могут быть определены путем прямого вычисления. Для других величин, таких, как электромагнитные поля, трансформационные свойства отчасти задаются по определению. Однако мы стремимся к тому, чтобы все величины, представляющие физический интерес, имели достаточно простые правила преобразования; в противном случае было бы затруднительно сводить их вместе в форм-инвариантные уравнения. В этом параграфе мы введем класс объектов, правила преобразования которых особенно просты, и продемонстрируем их, где возможно, на примерах величин, определяемых непосредственно через кинематические переменные в данных системах координат.

Простейшее из правил преобразований — это правило для *скаляров*, которые не изменяются при любых преобразованиях координат. Очевидный пример — обычное число, такое, как 137 (или π, или нуль). Другой пример — собственное время $d\tau$, задаваемое выражением (3.2.6) (действительно, мы убедимся ниже, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ определяется как раз таким образом, чтобы $d\tau^2$ было инвариантом).

Согласно простейшему правилу, преобразуется *контравариантный вектор* V^μ, который при замене координат $x^\mu \to x'^\mu$ трансформируется следующим образом:

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{4.2.1}$$

Например, правила взятия частной производной дают

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \tag{4.2.2}$$

так что дифференциал от координаты является контравариантным вектором. Очень похожим является преобразование *ковариантного вектора* U_μ, который при замене $x^\mu \to x'^\mu$ преобразуется так:

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu. \tag{4.2.3}$$

Например, если ϕ — скалярное поле, то $\partial\phi/\partial x^\mu$ — ковариантный вектор, поскольку в соответствии с (4.2.3) в штрихованной системе координат градиент равен

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}. \tag{4.2.4}$$

От контравариантных и ковариантных векторов можно прямо перейти к *тензорам*. Тензор с верхними индексами μ, ν, ... и нижними индексами $\varkappa$, λ, ... преобразуется как произведение контравариантных векторов $U^\mu W^\nu$ ... и ковариантных векторов $V_\varkappa V_\lambda$ .... Например, при замене $x \to x'$ тензор $T^\mu{}_\nu{}^\lambda$ преобразуется следующим образом:

$$T'^\mu{}_\nu{}^\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\varkappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^\varkappa{}_\rho{}^\sigma. \tag{4.2.5}$$

Если все индексы у тензора верхние, будем называть его контравариантным; если все индексы нижние — то ковариантным; в остальных случаях — смешанным. Наиболее важный пример — это метрический тензор, определенный в § 2 гл. 3 в произвольной системе координат x^μ с помощью соотношения

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu},$$

где ξ^α — локально-инерциальные координаты. В какой-либо другой системе координат x'^μ метрический тензор равняется

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu},$$

и, следовательно,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \tag{4.2.6}$$

Видно, что $g_{\mu\nu}$ — действительно ковариантный тензор. Обратный ему тензор контравариантен, так как если мы вводим $g^{\lambda\mu}$ с помощью соотношения

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu,$$

то

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} g_{\varkappa\eta} =$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} g^{\rho\varkappa} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} g_{\varkappa\eta} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} = g'^{\lambda\mu}, \tag{4.2.7}$$

как и полагается контравариантному тензору. И наконец, символ Кронекера δ^μ_ν является смешанным тензором, поскольку

$$\delta^\mu_\nu \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} = \delta^\rho_\sigma. \tag{4.2.8}$$

Кроме скаляров и нуля, δ^{μ}_{ν} (как и его прямые произведения) является единственным тензором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат.

Вектор есть просто тензор с одним индексом, а скаляр — тензором без индекса, так что вообще нет нужды скаляр и вектор рассматривать отдельно. Однако читателя следует предупредить, что не все объекты являются тензорными; в частности, аффинная связность, несмотря на внешний вид ее записи, не есть тензор.

Мы можем теперь выделить один очень широкий класс инвариантных уравнений, а именно: любое уравнение будет инвариантным при произвольных преобразованиях координат, если оно имеет вид равенства двух тензоров с одинаковым набором верхних и нижних индексов. Например, если некие $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ и $B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ — два тензора, преобразующиеся по правилу (4.2.5), и если в системе координат x^{μ} выполняется равенство $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$, то, очевидно, и в системе координат x'^{μ} справедливо равенство $A'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = B'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$. В частности, поскольку нуль можно представлять себе любого вида тензором по нашему желанию, верно утверждение, что данный тензор исчезает инвариантно при произвольных преобразованиях координат. Напротив, формулы, не являющиеся равенствами между тензорами одного и того же вида (например, $T^{\mu\nu} = 5$ или $V^{\mu} = U_{\mu}$), могут численно выполняться в ограниченном классе систем координат, однако не быть справедливыми во всех системах.

§ 3. Тензорная алгебра

Для того чтобы научиться строить из тензоров уравнения, инвариантные при произвольных преобразованиях координат, надо знать, как из одних тензоров образовывать другие. Это выполняется с помощью нескольких простых алгебраических операций.

А. Суммирование. Сумма тензоров с одинаковыми верхними и нижними индексами есть тензор с теми же самыми индексами. Возьмем, например, два смешанных тензора. Рассмотрим их сумму

$$T^{\mu}{}_{\nu} \equiv aA^{\mu}{}_{\nu} + bB^{\mu}{}_{\nu},$$

где a и b — скаляры. Тогда $T^{\mu}{}_{\nu}$ является тензором, поскольку

$$\begin{aligned} T'^{\mu}{}_{\nu} &\equiv aA'^{\mu}{}_{\nu} + bB'^{\mu}{}_{\nu} = \\ &= a\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}A^{\rho}{}_{\sigma} + b\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}B^{\rho}{}_{\sigma} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}T^{\rho}{}_{\sigma}. \end{aligned}$$