Кроме скаляров и нуля, δ^μ_ν (как и его прямые произведения) является единственным тензором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат.

Вектор есть просто тензор с одним индексом, а скаляр — тензором без индекса, так что вообще нет нужды скаляр и вектор рассматривать отдельно. Однако читателя следует предупредить, что не все объекты являются тензорными; в частности, аффинная связность, несмотря на внешний вид ее записи, не есть тензор.

Мы можем теперь выделить один очень широкий класс инвариантных уравнений, а именно: любое уравнение будет инвариантным при произвольных преобразованиях координат, если оно имеет вид равенства двух тензоров с одинаковым набором верхних и нижних индексов. Например, если некие $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ и $B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ — два тензора, преобразующиеся по правилу (4.2.5), и если в системе координат x^μ выполняется равенство $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$, то, очевидно, и в системе координат x'^μ справедливо равенство $A'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = B'^{\mu\lambda}{}_{\nu}$. В частности, поскольку нуль можно представлять себе любого вида тензором по нашему желанию, верно утверждение, что данный тензор исчезает инвариантно при произвольных преобразованиях координат. Напротив, формулы, не являющиеся равенствами между тензорами одного и того же вида (например, $T^{\mu\nu} = 5$ или $V^\mu = U_\mu$), могут численно выполняться в ограниченном классе систем координат, однако не быть справедливыми во всех системах.

§ 3. Тензорная алгебра

Для того чтобы научиться строить из тензоров уравнения, инвариантные при произвольных преобразованиях координат, надо знать, как из одних тензоров образовывать другие. Это выполняется с помощью нескольких простых алгебраических операций.

А. Суммирование. Сумма тензоров с одинаковыми верхними и нижними индексами есть тензор с теми же самыми индексами. Возьмем, например, два смешанных тензора. Рассмотрим их сумму

$$T^{\mu}{}_{\nu} \equiv aA^{\mu}{}_{\nu} + bB^{\mu}{}_{\nu},$$

где a и b — скаляры. Тогда $T^{\mu}{}_{\nu}$ является тензором, поскольку

$$\begin{aligned} T'^{\mu}{}_{\nu} &\equiv aA'^{\mu} \quad + bB'^{\mu}{}_{\nu} = \\ &= a\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}A^{\rho}{}_{\sigma} + b\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}B^{\rho}{}_{\sigma} = \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}T^{\rho}{}_{\sigma}. \end{aligned}$$

Б. Прямое произведение. Произведение компонент двух векторов приводит к тензору, верхние и нижние индексы которого состоят из всех верхних и нижних индексов двух первоначальных тензоров. Например, если $A^{\mu}{}_{\nu}$ и B^{ρ} являются тензорами, то комбинация

$$T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho} \equiv A^{\mu}{}_{\nu} B^{\rho}$$

тоже тензор, т. е.

$$\begin{aligned} T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho} &\equiv A'^{\mu}{}_{\nu} B'^{\rho} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\nu}} A^{\lambda}{}_{\varkappa} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} B^{\sigma} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} T^{\lambda}{}_{\varkappa}{}^{\sigma}. \end{aligned}$$

В. Свертка. Приравнивание верхнего и нижнего индексов и суммирование по их четырем значениям дают новый тензор, в котором эти два индекса отсутствуют. Например, если $T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\sigma}$ является тензором, и если образовать

$$T^{\mu\rho} \equiv T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\nu},$$

то $T^{\mu\rho}$ тоже тензор, поскольку

$$\begin{aligned} T'^{\mu\rho} &= T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\nu} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}} T^{\varkappa}{}_{\lambda}{}^{\eta\tau} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\varkappa}{}_{\lambda}{}^{\eta\lambda} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\varkappa\eta}. \end{aligned}$$

Эти три операции можно, конечно, объединять различным образом. Наиболее важная комбинированная операция приводит к *подниманию* или *опусканию* индексов. Если мы рассмотрим прямое произведение контравариантного или смешанного тензора T с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ и свернем индекс μ с одним из контравариантных индексов T, мы получим новый тензор, в котором этот контравариантный индекс μ заменен ковариантным индексом. Например, если $T^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\rho}$ является тензором и мы вводим

$$S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \equiv g_{\mu\nu} T^{\mu\rho}{}_{\sigma},$$

то в соответствии с правилами Б и В, $S^{\rho}_{\nu\sigma}$ будет тензором. Точно так же, если мы возьмем прямое произведение ковариантного или смешанного тензора T с обратным метрическим тензором $g^{\mu\nu}$ и свернем индекс μ с одним из ковариантных индексов T, мы получим новый тензор, в котором этот ковариантный индекс заменен контравариантным индексом ν. Например, если $S_\mu{}^\rho{}_\sigma$ является тензором и мы определяем

$$R^{\nu\rho}{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} S_\mu{}^\rho{}_\sigma,$$

то $R^{\nu\rho}{}_\sigma$ также тензор. Отметим, что опускание индекса, а затем поднимание его на прежнее место приводят к первоначальному тензору. Например, в разобранном уже выше случае мы опускали индекс у T, чтобы получить S, а затем поднимали его опять, чтобы получить R, а потому $R = T$, поскольку

$$R^{\nu\rho}{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} S_\mu{}^\rho{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} T^{\lambda\rho}{}_\sigma = \delta^\nu_\lambda T^{\lambda\rho}{}_\sigma = T^{\nu\rho}{}_\sigma.$$

Поднимая и опуская индексы, можно записать тензор с N индексами 2^N различными способами. Так как все они физически эквивалентны, обычно используют один и тот же символ для всех 2^N тензоров, различая их только по положению индексов.

Полноты ради можно упомянуть, что тензор, полученный операцией поднимания одного из индексов метрического тензора $g_{\mu\nu}$ или опусканием индекса у обратного метрического тензора $g^{\mu\nu}$, есть в точности тензор Кронекера, поскольку

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

Точно так же, поднимание обоих индексов $g_{\mu\nu}$ дает обратный тензор

$$g^{\lambda\mu} g^{\varkappa\nu} g_{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} \delta^\varkappa{}_\mu = g^{\lambda\varkappa},$$

а опускание обоих индексов у $g^{\lambda\varkappa}$ приводит к метрическому тензору $g_{\mu\nu}$.

Читатель, вероятно, заметил, что это обсуждение тензорной алгебры совершенно аналогично соответствующему обсуждению в главе по специальной теории относительности (см. § 5 гл. 2), за одним важным исключением: здесь мы не разбирали операцию дифференцирования. Дело в том, что производная тензора, вообще говоря, не является тензором. Мы увидим в § 6 этой главы, что имеется определенный вид дифференцирования, называемый ковариантным дифференцированием, который дает еще один способ построения тензоров из тензоров.

§ 4. Тензорные плотности

Несмотря на широкую применимость тензоров, в их правилах преобразования нет ничего таинственного. Один из важных примеров нетензорной величины — детерминант метрического тензора

$$g \equiv -\operatorname{Det} g_{\mu\nu}. \qquad (4.4.1)$$