или смешанного тензора T с обратным метрическим тензором $g^{\mu\nu}$ и свернем индекс μ с одним из ковариантных индексов T, мы получим новый тензор, в котором этот ковариантный индекс заменен контравариантным индексом ν. Например, если $S_\mu{}^\rho{}_\sigma$ является тензором и мы определяем

$$R^{\nu\rho}{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} S_\mu{}^\rho{}_\sigma,$$

то $R^{\nu\rho}{}_\sigma$ также тензор. Отметим, что опускание индекса, а затем поднимание его на прежнее место приводят к первоначальному тензору. Например, в разобранном уже выше случае мы опускали индекс у T, чтобы получить S, а затем поднимали его опять, чтобы получить R, а потому $R = T$, поскольку

$$R^{\nu\rho}{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} S_\mu{}^\rho{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} T^{\lambda\rho}{}_\sigma = \delta^\nu_\lambda T^{\lambda\rho}{}_\sigma = T^{\nu\rho}{}_\sigma.$$

Поднимая и опуская индексы, можно записать тензор с N индексами 2^N различными способами. Так как все они физически эквивалентны, обычно используют один и тот же символ для всех 2^N тензоров, различая их только по положению индексов.

Полноты ради можно упомянуть, что тензор, полученный операцией поднимания одного из индексов метрического тензора $g_{\mu\nu}$ или опусканием индекса у обратного метрического тензора $g^{\mu\nu}$, есть в точности тензор Кронекера, поскольку

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

Точно так же, поднимание обоих индексов $g_{\mu\nu}$ дает обратный тензор

$$g^{\lambda\mu} g^{\varkappa\nu} g_{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} \delta^\varkappa{}_\mu = g^{\lambda\varkappa},$$

а опускание обоих индексов у $g^{\lambda\varkappa}$ приводит к метрическому тензору $g_{\mu\nu}$.

Читатель, вероятно, заметил, что это обсуждение тензорной алгебры совершенно аналогично соответствующему обсуждению в главе по специальной теории относительности (см. § 5 гл. 2), за одним важным исключением: здесь мы не разбирали операцию дифференцирования. Дело в том, что производная тензора, вообще говоря, не является тензором. Мы увидим в § 6 этой главы, что имеется определенный вид дифференцирования, называемый ковариантным дифференцированием, который дает еще один способ построения тензоров из тензоров.

§ 4. Тензорные плотности

Несмотря на широкую применимость тензоров, в их правилах преобразования нет ничего таинственного. Один из важных примеров нетензорной величины — детерминант метрического тензора

$$g \equiv -\operatorname{Det} g_{\mu\nu}. \tag{4.4.1}$$

Правило преобразования метрического тензора можно рассматривать как матричное уравнение

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Вычисляя его детерминант, находим

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g, \tag{4.4.2}$$

где $| \partial x/\partial x' |$ — *якобиан* преобразования $x' \to x$, т. е. детерминант матрицы $\partial x^\rho/\partial x'^\mu$. Величина типа g, преобразующаяся подобно скаляру, если не считать дополнительных множителей от якобиана, называется *скалярной плотностью*. Аналогично величина, которая преобразуется как тензор, но с дополнительными множителями от якобиана, называется *тензорной плотностью*. Число сомножителей $| \partial x'/\partial x |$ в детерминанте называется *весом плотности*. Например, из выражения (4.4.2) видно, что g является плотностью с весом —2, поскольку

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-1}, \tag{4.4.3}$$

в чем мы можем убедиться, вычисляя детерминант уравнения

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

Любая тензорная плотность веса W может быть выражена как обычный тензор, умноженный на коэффициент $g^{-W/2}$. Например, тензорная плотность $\mathcal{T}^\mu{}_\nu$ веса W преобразуется по правилу

$$\mathcal{T}'^\mu{}_\nu = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^W \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\nu} \mathcal{T}^\lambda{}_\varkappa. \tag{4.4.4}$$

Используя (4.4.2), находим

$$g'^{W/2} \mathcal{T}'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\nu} g^{W/2} \mathcal{T}^\lambda{}_\varkappa. \tag{4.4.5}$$

Важная роль тензорных плотностей определяется фундаментальной теоремой интегрального исчисления (см., например, [5]), состоящей в том, что при произвольном преобразовании координат $x \to x'$ элемент объема d^4x заменяется так:

$$d^4x' = \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| d^4x. \tag{4.4.6}$$

Следовательно, произведение d^4x на тензорную плотность с весом —1 преобразуется как обычный тензор. В частности, $\sqrt{g}d^4x$ является инвариантным элементом объема.

Существует тензорная плотность, элементы которой одни и те же во всех системах координат,— это тензорная плотность Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$. Чтобы ввести эту величину в произвольной системе координат, расставим индексы координат в некотором произвольном, но определенном порядке, например x, y, z, t или r, θ, φ, t и т. п. Тогда $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ определяется следующим образом:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa} = \begin{cases} +1 & \text{при четной перестановке индексов,} \\ -1 & \text{при нечетной перестановке индексов,} \\ 0, & \text{если какая-нибудь пара индексов совпадает.} \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Чтобы убедиться в том, что это та же тензорная плотность, рассмотрим величину

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\varkappa}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}. \tag{4.4.8}$$

Видно, что она полностью антисимметрична по индексам ρ, σ, η, ξ и, следовательно, пропорциональна $\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$. Чтобы найти коэффициент пропорциональности, предположим, что $\rho\sigma\eta\xi$ расставлены в нормальном порядке. Тогда (4.4.8) есть как раз детерминант $|\partial x'/\partial x|$, и

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\varkappa}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}. \tag{4.4.9}$$

Следовательно, $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ является тензорной плотностью веса -1. Можно образовать обычный контравариантный тензор, умножая $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ на $g^{-1/2}$. Можно также образовать ковариантную плотность, понижая ее индексы следующим образом:

$$\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} \equiv g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} g_{\eta\lambda} g_{\xi\varkappa} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}. \tag{4.4.10}$$

Это выражение антисимметрично по индексам и, следовательно, пропорционально $\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$. Упорядочив $\rho\sigma\eta\xi$ в нормальную последовательность, найдем, что константа пропорциональности равняется $-g$, так что

$$\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} = -g\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}. \tag{4.4.11}$$

Читатель может легко убедиться в том, что $\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi}$ — ковариантная тензорная плотность веса -1.

Правила тензорной алгебры легко распространить и на тензорные плотности:

А. Сумма двух тензорных плотностей одинакового веса W есть тензорная плотность веса W.

Б. Прямое произведение двух тензорных плотностей с весами W_1 и W_2 дает тензорную плотность с весом $W_1 + W_2$.

В. Свертывание индексов у тензорной плотности веса W приводит к тензорной плотности веса W. Из правил Б и В следует, что поднимание и опускание индексов не изменяют веса тензорной плотности.

§ 5. Преобразование аффинной связности

Помимо рассмотренных довольно тривиальных тензорных плотностей, в физических законах фигурирует другая крайне важная нетензорная величина — аффинная связность. Напомним ее определение:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\, \partial x^{\nu}}. \tag{4.5.1}$$

Здесь $\xi^{\alpha}(x)$ — локально-инерциальные координаты. Переходя от x^{μ} в другую систему x'^{μ}, находим

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}} =$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) =$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau}\, \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right].$$

Ссылаясь снова на определение (4.5.1), видим, что

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}}. \tag{4.5.2}$$

Первый член в правой части — это то, что возникало бы, если бы $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ была тензором; второй член неоднородный, делающий $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ нетензорной величиной.

Тензорный анализ позволяет самым простым образом установить связь между $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} \left(g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) =$$

$$= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\varkappa}\, \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} +$$

$$+ g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\varkappa}\, \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}},$$