В. Свертывание индексов у тензорной плотности веса W приводит к тензорной плотности веса W. Из правил Б и В следует, что поднимание и опускание индексов не изменяют веса тензорной плотности.

§ 5. Преобразование аффинной связности

Помимо рассмотренных довольно тривиальных тензорных плотностей, в физических законах фигурирует другая крайне важная нетензорная величина — аффинная связность. Напомним ее определение:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\, \partial x^{\nu}}. \tag{4.5.1}$$

Здесь $\xi^{\alpha}(x)$ — локально-инерциальные координаты. Переходя от x^{μ} в другую систему x'^{μ}, находим

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}} =$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) =$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau}\, \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right].$$

Ссылаясь снова на определение (4.5.1), видим, что

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}}. \tag{4.5.2}$$

Первый член в правой части — это то, что возникало бы, если бы $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ была тензором; второй член неоднородный, делающий $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ нетензорной величиной.

Тензорный анализ позволяет самым простым образом установить связь между $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} \left(g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) =$$

$$= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\varkappa}\, \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} +$$

$$+ g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\varkappa}\, \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}},$$

а потому

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g'_{\varkappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g'_{\varkappa\mu} - \frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} g'_{\mu\nu} =$$

$$= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \right) +$$

$$+ 2 g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\varkappa}} .$$

Отсюда следует

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}' = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left\{ {\rho \atop \tau\sigma} \right\} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} , \qquad (4.5.3)$$

где

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\varkappa} \left[\frac{\partial g_{\varkappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} \right] . \qquad (4.5.4)$$

Вычитая (4.5.3) из (4.5.2), видим, что величина $\left[\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \right]$ является *тензором*, поскольку

$$\left[\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \right]' = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left[\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \left\{ {\rho \atop \tau\sigma} \right\} \right] . \qquad (4.5.5)$$

Принцип эквивалентности говорит нам тогда, что существует специальная система координат ξ_X, в которой в данной точке X эффекты гравитации отсутствуют. В этой системе на свободные частицы не действуют никакие гравитационные силы, а потому в ней исчезает $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, а также не может возникать никакого гравитационного красного смещения для бесконечно близких точек, так что исчезают и первые производные $g_{\mu\nu}$. Поскольку величина $[\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \{{\rho \atop \tau\sigma}\}]$ равна нулю в локально-инерциальной системе координат и поскольку эта величина является тензором, она должна исчезать во всех системах координат, следовательно,

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \qquad (4.5.6)$$

Приведем на всякий случай другое выражение для неоднородного члена в правиле преобразования $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Продифференцируем тождество

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\lambda}_{\nu}$$

по x'^{μ}. Из этого сразу последует

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} . \qquad (4.5.7)$$

Поэтому (4.5.2) можно записать в виде

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\sigma}}. \tag{4.5.8}$$

Это как раз то, что мы получили бы, выполнив обратное преобразование $x' \to x$ и разрешив полученное равенство относительно $\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Теперь мы в состоянии использовать принцип общей ковариантности, чтобы дать еще одно доказательство того, что свободно падающая частица подчиняется следующему уравнению движения:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0, \tag{4.5.9}$$

где

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}. \tag{4.5.10}$$

Прежде всего заметим, что уравнения (4.5.9) и (4.5.10) справедливы в отсутствие гравитации, поскольку при $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$ и $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = 0, \qquad d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu},$$

а это совпадает с уравнениями, которые описывают свободную частицу в специальной теории относительности. Далее заметим, что (4.5.9) и (4.5.10) инвариантны при произвольных преобразованиях координат, поскольку

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

тогда как (4.5.8) приводит к равенству

$$\Gamma'^{\mu}_{\sigma\tau} \frac{dx'^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx'^{\tau}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$

Складывая эти два уравнения, находим, что левая часть уравнения (4.5.9) является вектором, т. е.

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} =$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \left(\frac{d^2 x^{\varkappa}}{d\tau^2} + \Gamma^{\varkappa}_{\sigma\rho} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau}\right). \tag{4.5.11}$$

Таким образом, уравнение (4.5.9), так же как (4.5.10), оказывается явно ковариантным. Принцип общей ковариантности говорит нам тогда, что соотношения (4.5.9) и (4.5.10) справедливы в произвольных гравитационных полях, поскольку они *действительно* выполняются в локально-инерциальных системах. Напомним аналогичное положение из § 1 этой главы, которое утверждает, что соотношения справедливы во всех системах координат, если они справедливы в какой-нибудь одной системе.

§ 6. Ковариантное дифференцирование

Мы уже отмечали, что дифференцирование тензора, вообще говоря, приводит не к тензору. Рассмотрим, например, контравариантный вектор V^{μ}, правило преобразования которого есть

$$V'^{\mu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}V^{\nu}.$$

Дифференцирование по x'^{λ} дает

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}V^{\nu}. \qquad (4.6.1)$$

Первый член в правой части здесь совпадает с тем, что возникло бы, если бы выражение $\partial V^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ было тензором, но второй член нарушает тензорный характер $\partial V'^{\mu}/\partial x'^{\lambda}$.

Хотя $\partial V^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ не является тензором, с его помощью можно построить тензор. Используя уравнение (4.5.8), находим, что

$$\Gamma'^{\mu}_{\lambda\varkappa}V'^{\varkappa}=\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\varkappa}}\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}-\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\varkappa}}\right]\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\eta}}V^{\eta}=$$

$$=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}V^{\sigma}-\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}V^{\sigma}. \qquad (4.6.2)$$

Складывая (4.6.1) и (4.6.2), видим, что неоднородные члены уничтожаются, и получаем

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}+\Gamma'^{\mu}_{\lambda\varkappa}V'^{\varkappa}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}}+\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}V^{\sigma}\right). \qquad (4.6.3)$$

Таким образом, мы пришли к определению *ковариантной производной*

$$V^{\mu}{}_{;\lambda}\equiv\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\varkappa}V^{\varkappa}, \qquad (4.6.4)$$

и (4.6.3) говорит о том, что $V^{\mu}{}_{;\lambda}$ есть тензор, поскольку

$$V'^{\mu}{}_{;\lambda}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}V^{\nu}{}_{;\rho}.$$