няются в локально-инерциальных системах. Напомним аналогичное положение из § 1 этой главы, которое утверждает, что соотношения справедливы во всех системах координат, если они справедливы в какой-нибудь одной системе.

§ 6. Ковариантное дифференцирование

Мы уже отмечали, что дифференцирование тензора, вообще говоря, приводит не к тензору. Рассмотрим, например, контравариантный вектор V^μ, правило преобразования которого есть

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu.$$

Дифференцирование по x'^λ дает

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu. \tag{4.6.1}$$

Первый член в правой части здесь совпадает с тем, что возникло бы, если бы выражение $\partial V^\mu/\partial x^\lambda$ было тензором, но второй член нарушает тензорный характер $\partial V'^\mu/\partial x'^\lambda$.

Хотя $\partial V^\mu/\partial x^\lambda$ не является тензором, с его помощью можно построить тензор. Используя уравнение (4.5.8), находим, что

$$\Gamma'^\mu_{\lambda\varkappa} V'^\varkappa = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\varkappa} \Gamma^\nu_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\varkappa}\right] \frac{\partial x'^\varkappa}{\partial x^\eta} V^\eta =$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\nu_{\rho\sigma} V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\sigma. \tag{4.6.2}$$

Складывая (4.6.1) и (4.6.2), видим, что неоднородные члены уничтожаются, и получаем

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\varkappa} V'^\varkappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} V^\sigma\right). \tag{4.6.3}$$

Таким образом, мы пришли к определению *ковариантной производной*

$$V^\mu{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\varkappa} V^\varkappa, \tag{4.6.4}$$

и (4.6.3) говорит о том, что $V^\mu{}_{;\lambda}$ есть тензор, поскольку

$$V'^\mu{}_{;\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu{}_{;\rho}.$$

Мы можем также определить ковариантную производную от ковариантного вектора V_μ. Вспомним правило преобразования

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V_\rho.$$

Дифференцируя это соотношение по x'^ν, получаем

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\rho. \tag{4.6.5}$$

Далее из (4.5.2) следует, что

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'_\lambda = \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\tau_{\rho\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right] \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\lambda} V_\varkappa =$$

$$= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\varkappa_{\rho\sigma} V_\varkappa + \frac{\partial^2 x^\varkappa}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\varkappa. \tag{4.6.6}$$

Если вычесть (4.6.6) из (4.6.5), неоднородные члены сократятся, и мы получим

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'_\lambda = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\varkappa_{\rho\sigma} V_\varkappa \right). \tag{4.6.7}$$

Таким образом, мы ввели определение ковариантной производной от ковариантного вектора

$$V_{\mu;\,\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda, \tag{4.6.8}$$

и выражение (4.6.7) говорит нам, что $V_{\mu;\,\nu}$ является тензором, поскольку

$$V'_{\mu;\,\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V_{\rho;\,\sigma}. \tag{4.6.9}$$

Способ распространения этих определений на случай общего вида тензора очевиден. Ковариантная производная по x^ρ от тензора $T :::$ равна $\partial T ::: /\partial x^\rho$ плюс, для каждого контравариантного индекса μ, член, равный $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, умноженный на T, где μ заменено на ν, минус, для каждого ковариантного индекса λ, член $\Gamma^\varkappa_{\lambda\rho}$, умноженный на T, где λ заменено на $\varkappa$, т. е.

$$T^{\mu\sigma}{}_{\lambda;\,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\sigma}{}_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} T^{\nu\sigma}{}_\lambda + \Gamma^\sigma_{\rho\nu} T^{\mu\nu}{}_\lambda - \Gamma^\varkappa_{\lambda\rho} T^{\mu\sigma}{}_\varkappa. \tag{4.6.10}$$

Легко убедиться в том, что это действительно тензор.

Можно также распространить операцию ковариантного дифференцирования на тензорные плотности. Простейший способ добиться этого связан с учетом следующего факта: если $\mathscr{T}$ — тензорная плотность веса W, то $g^{W/2}\mathscr{T}$ является обычным тензором. Его ковариантная производная — это также тензор, а умножая его на $g^{-W/2}$, мы снова получаем тензорную плотность веса W. Следовательно, ковариантная производная тензорной плотности веса W определяется следующим образом:

$$\mathscr{T}:::_{;\rho} \equiv g^{-W/2}\,(g^{W/2}\mathscr{T}:::)_{;\rho} \qquad (4.6.11)$$

и уже не возникает необходимости проверять, что это действительно тензорная плотность веса W. Итог таков: ковариантная производная по x^ρ от тензорной плотности $\mathscr{T}$ веса W образуется как раз так, как если бы $\mathscr{T}$ являлось обычным тензором, за исключением того, что мы вводим дополнительный член $(W/2g)\,\mathscr{T}:::(\partial g/\partial x^\rho)$. Например,

$$\mathscr{T}^{\mu}{}_{\lambda;\,\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\rho}\mathscr{T}^{\mu}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\mathscr{T}^{\nu}{}_{\lambda} - \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}\mathscr{T}^{\mu}{}_{\varkappa} + \frac{W}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\rho}\mathscr{T}^{\mu}{}_{\lambda}. \qquad (4.6.12)$$

Комбинирование ковариантного дифференцирования с алгебраическими операциями, введенными в § 3 этой главы, приводит к действиям, аналогичным обычному дифференцированию. В частности:

А. Ковариантная производная суммы тензоров (с постоянными коэффициентами) равна сумме ковариантных производных от каждого тензора. Например, если α и β — константы, то

$$(\alpha A^{\mu}{}_{\nu} + \beta B^{\mu}{}_{\nu})_{;\lambda} = \alpha A^{\mu}{}_{\nu;\,\lambda} + \beta B^{\mu}{}_{\nu;\,\lambda}. \qquad (4.6.13)$$

Б. Ковариантная производная прямого произведения тензоров подчиняется правилу Лейбница. Например,

$$(A^{\mu}{}_{\nu}B^{\lambda})_{;\rho} = A^{\mu}{}_{\nu;\,\rho}B^{\lambda} + A^{\mu}{}_{\nu}B^{\lambda}{}_{;\rho}. \qquad (4.6.14)$$

В. Ковариантная производная свернутого тензора есть свертка ковариантной производной. Например, полагая $\sigma = \lambda$ в выражении (4.6.10), получаем

$$T^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}T^{\mu\lambda}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}T^{\nu\lambda}{}_{\lambda}, \qquad (4.6.15)$$

причем последние два члена в (4.6.10) сократились.

Заметим также, что ковариантная производная метрического тензора равна нулю, поскольку она исчезает в локально-инерциальных координатах, где исчезают $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$, а тензор, равный нулю в одной системе, равен нулю во всех системах. Этот же результат можно получить более простым способом, если заметить, что

$$g_{\mu\nu;\,\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}.$$

Из уравнения (3.3.1) следует, что эта величина исчезает:

$$g_{\mu\nu;\,\lambda} = 0. \qquad (4.6.16)$$

(Это рассуждение можно обратить, и получить еще один вывод соотношения между $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$.) Точно таким же способом можно показать, что ковариантные производные других видов от метрического тензора также исчезают, т. е. что

$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0, \qquad (4.6.17)$$

$$\delta^{\mu}_{\nu;\,\lambda} = 0. \qquad (4.6.18)$$

Из (4.6.16) — (4.6.18) следует, что операции ковариантного дифференцирования и поднимания-опускания индексов коммутируют; например,

$$(g^{\mu\nu}V_{\nu})_{;\lambda} = g^{\mu\nu}V_{\nu;\,\lambda}. \qquad (4.6.19)$$

Важность операции ковариантного дифференцирования вытекает из следующих *двух* ее свойств: она преобразует одни тензоры в другие и сводится к обычному дифференцированию в отсутствие гравитации, т. е. когда $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$. Эти свойства дают следующий алгоритм введения эффектов гравитации в физических системах. *Следует написать соответствующее уравнение специальной теории относительности, справедливое в отсутствие гравитации, затем заменить $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$, а все производные — на ковариантные производные.* Полученное уравнение будет общековариантным, справедливым в отсутствие гравитации и, следовательно, согласно принципу общей ковариантности, оно будет справедливо и при наличии гравитационных полей при условии, что рассматриваемый пространственно-временной масштаб всегда достаточно мал по сравнению с масштабом гравитационного поля.

§ 7. Градиент, ротор и дивергенция

Существуют частные случаи, когда ковариантная производная имеет особенно простую форму. Простейший из них, конечно, ковариантная производная от скаляра, которая совпадает в действительности с обычным градиентом:

$$S_{;\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}. \qquad (4.7.1)$$

Другой простой частный случай — это ковариантный ротор. Напомним, что по определению

$$V_{\mu;\,\nu} \equiv \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V_{\lambda}.$$