Из уравнения (3.3.1) следует, что эта величина исчезает:

$$g_{\mu\nu;\lambda}=0. \tag{4.6.16}$$

(Это рассуждение можно обратить, и получить еще один вывод соотношения между $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$.) Точно таким же способом можно показать, что ковариантные производные других видов от метрического тензора также исчезают, т. е. что

$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda}=0, \tag{4.6.17}$$

$$\delta^{\mu}_{\nu;\lambda}=0. \tag{4.6.18}$$

Из (4.6.16) — (4.6.18) следует, что операции ковариантного дифференцирования и поднимания-опускания индексов коммутируют; например,

$$(g^{\mu\nu}V_{\nu})_{;\lambda}=g^{\mu\nu}V_{\nu;\lambda}. \tag{4.6.19}$$

Важность операции ковариантного дифференцирования вытекает из следующих *двух* ее свойств: она преобразует одни тензоры в другие и сводится к обычному дифференцированию в отсутствие гравитации, т. е. когда $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=0$. Эти свойства дают следующий алгоритм введения эффектов гравитации в физических системах. *Следует написать соответствующее уравнение специальной теории относительности, справедливое в отсутствие гравитации, затем заменить $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$, а все производные — на ковариантные производные.* Полученное уравнение будет общековариантным, справедливым в отсутствие гравитации и, следовательно, согласно принципу общей ковариантности, оно будет справедливо и при наличии гравитационных полей при условии, что рассматриваемый пространственно-временной масштаб всегда достаточно мал по сравнению с масштабом гравитационного поля.

§ 7. Градиент, ротор и дивергенция

Существуют частные случаи, когда ковариантная производная имеет особенно простую форму. Простейший из них, конечно, ковариантная производная от скаляра, которая совпадает в действительности с обычным градиентом:

$$S_{;\mu}=\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}. \tag{4.7.1}$$

Другой простой частный случай — это ковариантный ротор. Напомним, что по определению

$$V_{\mu;\nu}\equiv\frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V_{\lambda}.$$

Так как $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ симметрично по μ и ν, то ковариантный ротор совпадает с обычным ротором

$$V_{\mu;\nu}-V_{\nu;\mu}=\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{4.7.2}$$

Еще один специальный случай, немного более сложный,— это ковариантная дивергенция контравариантного вектора

$$V^{\mu}{}_{;\mu}\equiv\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu}+\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}V^\lambda. \tag{4.7.3}$$

Заметим, что

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left\{\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho}\right\}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}. \tag{4.7.4}$$

Это легко вычислить, если вспомнить, что для произвольной матрицы M

$$\mathrm{Sp}\left\{M^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}M(x)\right\}=\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\ln\mathrm{Det}\,M(x), \tag{4.7.5}$$

где Det означает детерминант, а Sp — след, т. е. сумму диагональных элементов. Чтобы доказать (4.7.5), рассмотрим вариацию Det M при смещении x^λ на δx^λ:

$$\begin{aligned}\delta\ln\mathrm{Det}\,M&\equiv\ln\mathrm{Det}\,(M+\delta M)-\ln\mathrm{Det}\,M=\\&=\ln\frac{\mathrm{Det}\,(M+\delta M)}{\mathrm{Det}\,M}=\ln\mathrm{Det}\,M^{-1}(M+\delta M)=\\&=\ln\mathrm{Det}\,(1+M^{-1}\delta M)\to\ln(1+\mathrm{Sp}\,M^{-1}\delta M)\to\mathrm{Sp}\,M^{-1}\delta M.\end{aligned}$$

Введение коэффициента δx^λ с обеих сторон этого выражения приводит к соотношению (4.7.5). Применяя теперь (4.7.5) в случае, когда M есть матрица $g_{\rho\mu}$, находим с помощью (4.7.4), что

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\ln g=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\sqrt{g}. \tag{4.7.6}$$

Из (4.7.3) тогда следует, что ковариантная производная равна просто

$$V^{\mu}{}_{;\mu}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{g}V^\mu. \tag{4.7.7}$$

Прямое следствие этого — ковариантная форма теоремы Гаусса: если V^μ исчезает на бесконечности, то

$$\int d^4x\sqrt{g}\,V^{\mu}{}_{;\mu}=0. \tag{4.7.8}$$

Отметим здесь появление коэффициента $\sqrt{g}$, который делает величину $d^4x\sqrt{g}$ инвариантной.

Можно также использовать (4.7.6) для упрощения формулы ковариантной дивергенции тензора. Например,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda},$$

и, применяя (4.7.6), находим

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g}\, T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \tag{4.7.9}$$

В частном случае $T^{\mu\lambda} = -T^{\lambda\mu}$последний член исчезает, так что

$$A^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g}\, A^{\mu\nu}), \tag{4.7.10}$$

когда $A^{\mu\nu}$ антисимметричен.

Есть другой частный случай, также достаточно важный. Ковариантная производная ковариантного тензора $A_{\mu\nu}$ равна

$$A_{\mu\nu;\,\lambda} \equiv \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} A_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} A_{\mu\rho}.$$

Предположим, что $A_{\mu\nu}$ антисимметричен, т. е.

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}.$$

Если к $A_{\mu\nu;\,\lambda}$ дважды прибавить тот же самый тензор с циклически переставленными индексами, мы найдем ввиду симметрии $\Gamma^\rho_{\mu\lambda}$ и антисимметрии $A_{\rho\nu}$, что все Г-члены сократятся и для антисимметричного A

$$A_{\mu\nu;\,\lambda} + A_{\lambda\mu;\,\nu} + A_{\nu\lambda;\,\mu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}. \tag{4.7.11}$$

§ 8. Векторный анализ в ортогональных координатах *

Читатель может спросить, как связан аппарат тензорного анализа, изложенный в этой главе, с известными формулами для градиента ротора и дивергенции в классических криволинейных системах координат. Эти трехмерные системы координат характеризуются условием, что g_{ij} диагонален, т. е.

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4.8.1}$$

где h_i — некая функция координат (см., например, [6]). (Условимся суммировать по повторяющимся индексам на протяжении

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной темы книги и может быть опущен при первом чтении.