Можно также использовать (4.7.6) для упрощения формулы ковариантной дивергенции тензора. Например,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda},$$

и, применяя (4.7.6), находим

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \tag{4.7.9}$$

В частном случае $T^{\mu\lambda} = -T^{\lambda\mu}$последний член исчезает, так что

$$A^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} A^{\mu\nu}), \tag{4.7.10}$$

когда $A^{\mu\nu}$ антисимметричен.

Есть другой частный случай, также достаточно важный. Ковариантная производная ковариантного тензора $A_{\mu\nu}$ равна

$$A_{\mu\nu;\lambda} \equiv \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} A_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} A_{\mu\rho}.$$

Предположим, что $A_{\mu\nu}$ антисимметричен, т. е.

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}.$$

Если к $A_{\mu\nu;\lambda}$ дважды прибавить тот же самый тензор с циклически переставленными индексами, мы найдем ввиду симметрии $\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}$ и антисимметрии $A_{\rho\nu}$, что все Г-члены сократятся и для антисимметричного A

$$A_{\mu\nu;\lambda} + A_{\lambda\mu;\nu} + A_{\nu\lambda;\mu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}. \tag{4.7.11}$$

§ 8. Векторный анализ в ортогональных координатах *

Читатель может спросить, как связан аппарат тензорного анализа, изложенный в этой главе, с известными формулами для градиента ротора и дивергенции в классических криволинейных системах координат. Эти трехмерные системы координат характеризуются условием, что g_{ij} диагонален, т. е.

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4.8.1}$$

где h_i — некая функция координат (см., например, [6]). (Условимся суммировать по повторяющимся индексам на протяжении

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной темы книги и может быть опущен при первом чтении.

всего этого параграфа.) Тогда обратный метрический тензор равен

$$g^{ij} = h_i^{-2}\delta_{ij}. \tag{4.8.2}$$

Инвариантная собственная длина при этом выглядит так:

$$ds^2 \equiv \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = h_1^2 (dx^1)^2 + h_2^2 (dx^2)^2 + h_3^2 (dx^3)^2, \tag{4.8.3}$$

а инвариантный элемент объема записывается следующим образом:

$$dV \equiv (\operatorname{Det} g)^{1/2}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = h_1 h_2 h_3\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{4.8.4}$$

То, что обычно называют компонентами вектора $\mathbf{V}$ при элементарных рассмотрениях, не является ковариантными компонентами V_i или контравариантными компонентами V^i, а есть «обычные» компоненты

$$\overline{V}_i \equiv h_i V^i = h_i^{-1} V_i. \tag{4.8.5}$$

Тогда скалярное произведение двух векторов записывается очень просто:

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{U} \equiv \sum_{ij} g_{ij} V^i U^j = \overline{V}_1\overline{U}_1 + \overline{V}_2\overline{U}_2 + \overline{V}_3\overline{U}_3. \tag{4.8.6}$$

Это, конечно, и заставляет выбрать определение в виде (4.8.5).] Однако градиент скаляра выглядит теперь несколько сложнее:

$$\nabla_i S \equiv \overline{S_{;i}} = h_i^{-1}\frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{4.8.7}$$

Ротор вектора V также иначе выглядит в «обычных» компонентах:

$$(\nabla\times\mathbf{V})_i \equiv h_i \sum_{jk} (\operatorname{Det} g)^{-1/2}\varepsilon^{ijk} V_{j;\,k} =$$

$$= h_i \sum_{ij} (h_1 h_2 h_3)^{-1}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j} h_k \overline{V}_k. \tag{4.8.8}$$

[Мы использовали (4.7.2), поскольку ε^{ijk} антисимметричен по j и k.] Например, первая компонента ротора равна

$$(\nabla\times\mathbf{V})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} h_3\overline{V}_3 - \frac{\partial}{\partial x^3} h_2\overline{V}_2\right). \tag{4.8.9}$$

Дивергенция вектора V есть не что иное, как ковариантная дивергенция (4.7.7):

$$\nabla\cdot\mathbf{V} \equiv \sum_i V^i{}_{;i} = (\operatorname{Det} g)^{-1/2}\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\operatorname{Det} g)^{1/2} V^i =$$

$$= (h_1 h_2 h_3)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} h_2 h_3 \overline{V}_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} h_1 h_3 \overline{V}_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} h_1 h_2 \overline{V}_3\right). \tag{4.8.10}$$

Лапласиан скалярной величины S равняется дивергенции ее градиента

$$\nabla^2 S \equiv \sum_{ij} (g^{ij} S_{;i})_{;j}, \tag{4.8.11}$$

или, объединяя (4.8.10) с (4.8.7), получаем

$$\nabla^2 S \equiv (h_1 h_2 h_3)^{-1} \times \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial S}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial S}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial S}{\partial x^3} \right]. \tag{4.8.12}$$

Читателю самому нетрудно убедиться в том, что если h_i задаются соответствующими формулами в сферических или цилиндрических координатах, то получаются обычные формулы для градиента, ротора, дивергенции и лапласиана.

§ 9. Ковариантное дифференцирование вдоль кривой

В этой главе до сих пор рассматривались тензорные поля, определенные во всем пространстве-времени. Теперь мы рассмотрим тензоры $T(\tau)$, определенные вдоль кривой $x^\mu(\tau)$. Приходят на память очевидные примеры: импульс $P^\mu(\tau)$ и спин $S_\mu(\tau)$ отдельной частицы. Для таких тензоров, конечно, бессмысленно говорить о ковариантном дифференцировании по x^μ, но мы можем определить ковариантную производную по инвариантной величине τ, с помощью которой параметризована кривая.

Сначала рассмотрим контравариантный вектор $A^\mu(\tau)$, преобразующийся по правилам:

$$A'^\mu(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(\tau). \tag{4.9.1}$$

Следует отметить, что частная производная $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$ вычисляется при $x^\nu = x^\nu(\tau)$, так что она зависит от τ. Следовательно, дифференцируя по τ, мы получаем два члена

$$\frac{dA'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu(\tau). \tag{4.9.2}$$

Вторая производная $\partial^2 x'^\mu/\partial x^\nu \partial x^\lambda$ аналогична тому члену, который нарушает однородность правила преобразования (4.5.8) аффинной связности, так что мы можем определить ковариантную производную вдоль кривой $x^\mu(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu. \tag{4.9.3}$$