

Лапласиан скалярной величины S равняется дивергенции ее градиента

$$\nabla^2 S \equiv \sum_{ij} (g^{ij} S_{;i})_{;j}, \quad (4.8.11)$$

или, объединяя (4.8.10) с (4.8.7), получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 S &\equiv (h_1 h_2 h_3)^{-1} \times \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial S}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial S}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial S}{\partial x^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.8.12)$$

Читателю самому нетрудно убедиться в том, что если h_i задаются соответствующими формулами в сферических или цилиндрических координатах, то получаются обычные формулы для градиента, ротора, дивергенции и лапласиана.

§ 9. Ковариантное дифференцирование вдоль кривой

В этой главе до сих пор рассматривались тензорные поля, определенные во всем пространстве-времени. Теперь мы рассмотрим тензоры $T(\tau)$, определенные вдоль кривой $x^\mu(\tau)$. Приходят на память очевидные примеры: импульс $P^\mu(\tau)$ и спин $S_\mu(\tau)$ отдельной частицы. Для таких тензоров, конечно, бессмысленно говорить о ковариантном дифференцировании по x^μ , но мы можем определить ковариантную производную по инвариантной величине τ , с помощью которой параметризована кривая.

Сначала рассмотрим контрагарантийный вектор $A^\mu(\tau)$, преобразующийся по правилам:

$$A'^\mu(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(\tau). \quad (4.9.1)$$

Следует отметить, что частная производная $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$ вычисляется при $x^\nu = x^\nu(\tau)$, так что она зависит от τ . Следовательно, дифференцируя по τ , мы получаем два члена

$$\frac{dA'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu(\tau). \quad (4.9.2)$$

Вторая производная $\partial^2 x'^\mu / \partial x^\nu \partial x^\lambda$ аналогична тому члену, который нарушает однородность правила преобразования (4.5.8) аффинной связности, так что мы можем определить ковариантную производную вдоль кривой $x^\mu(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu. \quad (4.9.3)$$

Тогда выражения (4.5.8), (4.9.1) и (4.9.2) показывают, что эта величина является вектором, поскольку

$$\frac{DA'^\mu}{D\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{DA^\nu}{D\tau}. \quad (4.9.4)$$

Сходство формул (4.9.3) и (4.6.4) для ковариантной производной векторного поля очевидно.

Аналогичное рассмотрение позволяет ввести ковариантную производную вдоль кривой $x^\mu(\tau)$ для ковариантного вектора $B_\mu(\tau)$:

$$\frac{DB_\mu}{D\tau} = \frac{dB_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} B_\lambda. \quad (4.9.5)$$

Выражение (4.5.2) позволяет убедиться в том, что найденная величина действительно вектор

$$\frac{DB'_\mu}{D\tau} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{DB_\nu}{D\tau}. \quad (4.9.6)$$

Точно таким же образом ковариантная производная вдоль кривой $x^\mu(\tau)$ от произвольного тензора $T(\tau)$ определяется добавлением к $dT/d\tau$ члена, такого как в (4.9.3), для каждого верхнего индекса и вычитанием аналогичного члена в (4.9.5) для каждого нижнего индекса. Например,

$$\frac{DT^\mu_v}{D\tau} \equiv \frac{dT^\mu_v}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} T^\rho_v - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \frac{dx^\lambda}{d\tau} T^\mu_\sigma \quad (4.9.7)$$

и

$$\frac{DT'^\mu_v}{D\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{DT^\rho_\sigma}{D\tau}. \quad (4.9.8)$$

Свойства ковариантного дифференцирования, кратко изложенные в § 6–8, могут быть легко распространены на случай дифференцирования вдоль кривой.

Следует упомянуть, что ковариантная производная тензорного поля вдоль кривой может быть введена с помощью обычной ковариантной производной этого поля; например, если T_v^μ — тензорное поле, тогда (4.9.6) приводит к выражению

$$\frac{DT^\mu_v}{D\tau} = T^\mu_{v;\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \quad (4.9.9)$$

Однако в гл. 6 мы увидим, что тензоры, заданные на кривых, не всегда могут быть обобщены на тензорные поля; для них производная $D/D\tau$ есть единственная возможная ковариантная производная.

Часто рассматривается случай, когда вектор $A^\mu(\tau)$, переносимый вдоль кривой частицей, не меняется с изменением τ , если частица рассматривается в системе отсчета $\xi_{x(\tau)}$, т. е. локаль-

но-инерциальной на $x(\tau)$. (Это выполняется для импульса и спина частицы, если на нее действуют только гравитационные силы; см. § 1 гл. 5.) В этой системе отсчета аффинная связность, а также $dA^\mu/d\tau$ исчезают, так что

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0. \quad (4.9.10)$$

Будучи ковариантным, это утверждение справедливо на $x(\tau)$ в локально-инерциальной системе $\xi_{x(\tau)}$ и, следовательно, справедливо во всех системах координат. Тогда вектор A^μ подчиняется дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\lambda\mu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu, \quad (4.9.11)$$

которое определяет A^μ для всех τ , если A^μ задано при некотором начальном τ . В этом случае говорят, что вектор $A^\mu(\tau)$ на кривой $x^\mu(\tau)$ задается с помощью *параллельного переноса*. Таким способом можно задать на кривой любой тензор, потребовав, чтобы его ковариантная производная вдоль кривой исчезала.

§ 10. Аналогия с электродинамикой *

В § 1 этой главы подчеркивалось, что общая ковариантность не является обычным принципом симметрии, в отличие от лоренц-инвариантности, а есть скорее динамический принцип, позволяющий ввести гравитационные поля. Сам по себе он имеет сильное сходство с другой «динамической симметрией» — локальной калибровочной инвариантностью, которой подчиняются эффекты электромагнитных полей. Локальная калибровочная инвариантность гласит, что дифференциальные уравнения, удовлетворяемые набором заряженных полей $\psi(x)$ и электромагнитным потенциалом $A_\alpha(x)$, сохраняют свою форму, если эти поля подвергают преобразованию (см., например, [6]):

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) e^{ie\varphi(x)}, \quad (4.10.1)$$

$$A_\alpha(x) \rightarrow A_\alpha(x) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \varphi(x), \quad (4.10.2)$$

где e — заряд частицы, представленной полями ψ , а $\varphi(x)$ — произвольная функция пространственно-временных координат x^α . Как построить калибровочно-инвариантные уравнения? Заметим, что производные заряженного поля ψ ведут себя при калибровочных преобразованиях не так, как само ψ , а следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \psi(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [\psi(x) e^{ie\varphi(x)}] = e^{ie\varphi(x)} \left[\frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\alpha} + ie\psi(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\alpha} \right].$$

*). Этот и следующий параграфы лежат несколько в стороне от основной линии книги и могут быть опущены при первом чтении.