но-инерциальной на $x(\tau)$. (Это выполняется для импульса и спина частицы, если на нее воздействуют только гравитационные силы; см. § 1 гл. 5.) В этой системе отсчета аффинная связность, а также $dA^\mu/d\tau$ исчезают, так что

$$\frac{DA^\mu}{D\tau}=0. \tag{4.9.10}$$

Будучи ковариантным, это утверждение справедливо на $x(\tau)$ в локально-инерциальной системе $\xi_{x(\tau)}$ и, следовательно, справедливо во всех системах координат. Тогда вектор A^μ подчиняется дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dA^\mu}{d\tau}=-\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}A^\nu, \tag{4.9.11}$$

которое определяет A^μ для всех τ, если A^μ задано при некотором начальном τ. В этом случае говорят, что вектор $A^\mu(\tau)$ на кривой $x^\mu(\tau)$ задается с помощью *параллельного переноса*. Таким способом можно задать на кривой любой тензор, потребовав, чтобы его ковариантная производная вдоль кривой исчезала.

§ 10. Аналогия с электродинамикой *

В § 1 этой главы подчеркивалось, что общая ковариантность не является обычным принципом симметрии, в отличие от лоренц-инвариантности, а есть скорее динамический принцип, позволяющий ввести гравитационные поля. Сам по себе он имеет сильное сходство с другой «динамической симметрией» — локальной калибровочной инвариантностью, которой подчиняются эффекты электромагнитных полей. Локальная калибровочная инвариантность гласит, что дифференциальные уравнения, удовлетворяемые набором заряженных полей $\psi(x)$ и электромагнитным потенциалом $A_\alpha(x)$, сохраняют свою форму, если эти поля подвергают преобразованию (см., например, [6]):

$$\psi(x)\to\psi(x)\,e^{ie\varphi(x)}, \tag{4.10.1}$$

$$A_\alpha(x)\to A_\alpha(x)+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi(x), \tag{4.10.2}$$

где e — заряд частицы, представленной полями ψ, а $\varphi(x)$ — произвольная функция пространственно-временных координат x^α. Как построить калибровочно-инвариантные уравнения? Заметим, что производные заряженного поля ψ ведут себя при калибровочных преобразованиях не так, как само ψ, а следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\psi(x)\to\frac{\partial}{\partial x^\alpha}[\psi(x)\,e^{ie\varphi(x)}]=e^{ie\varphi(x)}\left[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\alpha}+ie\psi(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\alpha}\right].$$

*) Этот и следующий параграфы лежат несколько в стороне от основной линии книги и могут быть опущены при первом чтении.

Аналогичным образом производные тензоров не ведут себя как тензоры при произвольных преобразованиях координат. Из этого следует, что уравнение, такое, как

$$(\Box^2 - m^2)\,\psi(x) = 0$$

где

$$\Box^2 \equiv \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta};$$

не является калибровочно-инвариантным, как не является оно и общековариантным. Заметим еще, что электромагнитный потенциал $A_\mu(x)$ подчиняется неоднородному калибровочному преобразованию, точно так же, как аффинная связность преобразуется с помощью неоднородного правила преобразования (4.5.2) при произвольных преобразованиях координат. В тензорном анализе мы прибавляли к производным тензоров члены, содержащие аффинную связность, чтобы образовать «ковариантные производные», которые преобразуются, подобно тензорам. В электродинамике мы прибавляем к производной от поля вектор-потенциал, чтобы образовать «калибровочно-ковариантную производную»:

$$\mathscr{D}_\alpha\psi(x) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - ieA_\alpha(x)\right]\psi(x), \tag{4.10.3}$$

которая преобразуется как само поле

$$\mathscr{D}_\alpha\psi(x) \to [\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]\,e^{ie\varphi(x)}. \tag{4.10.4}$$

Уравнение, инвариантное при калибровочных преобразованиях с постоянным φ (такая инвариантность равносильна просто сохранению заряда), будет инвариантно и при калибровочном преобразовании (4.10.1), (4.10.2), если в это уравнение входят только поля $\psi(x)$ и их калибровочно-ковариантные производные $\mathscr{D}_\alpha\psi(x)$. Аналогично этому, уравнение, инвариантное при преобразованиях Лоренца, инвариантно при произвольных преобразованиях координат, если оно составлено лишь из тензоров и их ковариантных производных. Например, мы можем написать калибровочно-инвариантное уравнение, которое описывает взаимодействие заряженного скалярного поля $\psi(x)$ с электромагнитным в виде

$$[\eta^{\alpha\beta}\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta + m^2]\,\psi(x) = 0, \tag{4.10.5}$$

или, более подробно,

$$\left(\Box^2 - 2ieA^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - ie\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} - e^2A^\alpha A_\alpha + m^2\right)\psi(x) = 0.$$

Одно из важных свойств таких теорий — это то, что они позволяют ввести сохраняющиеся калибровочно-инвариантные токи; в рас-

сматриваемом примере мы можем определить

$$J_\alpha(x) \equiv -ie\{\psi^\dagger(x)\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \psi(x)\,[\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger\}.$$

(«Кинжал» означает комплексное сопряжение, а в квантовой теории—эрмитово сопряжение.) Свойство калибровочной инвариантности очевидно; а для того чтобы убедиться, что $J_\alpha(x)$ сохраняется, вычислим величину

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = -ie\Big\{&\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\alpha} - ieA^\alpha(x)\,\psi(x)\right) - \\ &-\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^\alpha} + ieA^\alpha(x)\,\psi^\dagger(x)\right) + \\ &+\psi^\dagger(x)\,(\mathscr{D}^\alpha + ieA^\alpha(x))\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \\ &-\psi(x)\,[(\mathscr{D}^\alpha + ieA^\alpha(x))\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger\Big\} = \\ &= \psi^\dagger(x)\,\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \psi(x)\,[\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger.\end{aligned}$$

Подставляя сюда (4.10.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0.$$

Можно, следовательно, подставить этот ток в правую часть уравнения Максвелла (2.7.6), и уравнение при этом останется калибровочно-инвариантным. В гл. 7 мы покажем, что уравнения поля гравитации выводятся аналогичным образом.

Можно распространить эту аналогию между калибровочной инвариантностью электродинамики и общей ковариантностью теории относительности на сходную симметрию, называемую киральной (см. [4]). Такая симметрия характерна для взаимодействия π-мезонов, однако надлежащее разъяснение этого вопроса могло бы составить содержание еще одной книги.

§ 11. p-формы и внешние производные *

Антисимметричные тензоры и их антисимметризованные производные обладают рядом замечательно простых и полезных свойств; с частью из них мы уже познакомились в § 7 этой главы. Чтобы описать эти свойства единым образом, математики развили общий формализм, известный как *теория дифференциальных форм* [1]). К сожалению, слишком абстрактные и сокращенные обозначения, используемые в этом формализме, серьезно затрудняли в последние годы общение между «чистыми» математиками и физиками. В этом параграфе будут изложены фундаментальные результаты

[1]) Для лучшего понимания материала по теории дифференциальных форм см., например, [8].