сматриваемом примере мы можем определить

$$J_\alpha(x) \equiv -ie\{\psi^\dagger(x)\, \mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \psi(x)\, [\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger\}.$$

(«Кинжал» означает комплексное сопряжение, а в квантовой теории—эрмитово сопряжение.) Свойство калибровочной инвариантности очевидно; а для того чтобы убедиться, что $J_\alpha(x)$ сохраняется, вычислим величину

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = -ie\Big\{&\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\alpha} - ieA^\alpha(x)\,\psi(x)\Big) -\\ &-\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^\alpha} + ieA^\alpha(x)\,\psi^\dagger(x)\Big) +\\ &+\psi^\dagger(x)\,(\mathscr{D}^\alpha + ieA^\alpha(x))\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x) -\\ &-\psi(x)\,[(\mathscr{D}^\alpha + ieA^\alpha(x))\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger\Big\} =\\ &= \psi^\dagger(x)\,\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \psi(x)\,[\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger.\end{aligned}$$

Подставляя сюда (4.10.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0.$$

Можно, следовательно, подставить этот ток в правую часть уравнения Максвелла (2.7.6), и уравнение при этом останется калибровочно-инвариантным. В гл. 7 мы покажем, что уравнения поля гравитации выводятся аналогичным образом.

Можно распространить эту аналогию между калибровочной инвариантностью электродинамики и общей ковариантностью теории относительности на сходную симметрию, называемую киральной (см. [4]). Такая симметрия характерна для взаимодействия π-мезонов, однако надлежащее разъяснение этого вопроса могло бы составить содержание еще одной книги.

§ 11. *p*-формы и внешние производные *

Антисимметричные тензоры и их антисимметризованные производные обладают рядом замечательно простых и полезных свойств; с частью из них мы уже познакомились в § 7 этой главы. Чтобы описать эти свойства единым образом, математики развили общий формализм, известный как *теория дифференциальных форм* [1]). К сожалению, слишком абстрактные и сокращенные обозначения, используемые в этом формализме, серьезно затрудняли в последние годы общение между «чистыми» математиками и физиками. В этом параграфе будут изложены фундаментальные результаты

[1]) Для лучшего понимания материала по теории дифференциальных форм см., например, [8].

теории дифференциальных форм, однако в тензорных обозначениях, знакомых физикам, а не в малопонятных обозначениях, применяемых математиками.

Ковариантный тензор ранга p, антисимметричный при перестановке любой пары индексов, назовем *p-формой.* В пространстве n измерений число алгебраически независимых компонент p-формы равно биномиальному коэффициенту:

$$\binom{n}{p} \equiv \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,. \tag{4.11.1}$$

Например, скалярное поле есть 0-форма, ковариантное векторное поле — 1-форма, а антисимметричный ковариантный тензор с двумя индексами — 2-форма.

Линейная комбинация p-форм является также p-формой. Однако прямое произведение $s_{\mu\nu\ldots}t_{\rho\sigma\ldots}$ p-формы $s_{\mu\nu\ldots}$ и q-формы $t_{\rho\sigma\ldots}$ *не будет* $(p+q)$-формой, поскольку оно не полностью антисимметрично. Можно образовать $(p+q)$-форму $s\wedge t$, антисимметризуя прямое произведение:

$$(s\wedge t)_{\mu_1\ldots\mu_{p+q}} \equiv \mathrm{Antisym} \times \{s_{\mu_1\ldots\mu_p} t_{\mu_{p+1}\ldots\mu_{p+q}}\}. \tag{4.11.2}$$

Слово «Antisym» будет всегда обозначать среднее по всем перестановкам (П) индексов:

$$\mathrm{Antisym}\,\{u_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}\} \equiv \frac{1}{m!}\sum_{\Pi} \delta_\Pi u_{\mu_{\Pi 1}\mu_{\Pi 2}\ldots\mu_{\Pi m}}. \tag{4.11.3}$$

Здесь δ_Π — знаковая функция, равная $+1$ или -1 в зависимости от того, содержит ли П четное или нечетное число перестановок отдельных пар индексов:

$$\delta_\Pi \equiv \begin{cases} +1, & \Pi \text{ четное}, \\ -1, & \Pi \text{ нечетное}. \end{cases} \tag{4.11.4}$$

Антисимметризованное прямое произведение (4.11.2) называется *внешним произведением.* Например, внешнее произведение 0-формы s и 1-формы t_μ является обычным произведением

$$(s\wedge t)_\mu \equiv s t_\mu,$$

в то время как внешнее произведение 1-формы s_μ и 1-формы t_ν есть 2-форма:

$$(s\wedge t)_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(s_\mu t_\nu - s_\nu t_\mu).$$

Читатель может легко убедиться сам, что внешнее произведение *ассоциативно*:

$$(s\wedge t)\wedge u = s\wedge(t\wedge u) \tag{4.11.5}$$

и *билинейно*:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2)\wedge t &= \alpha_1(s_1\wedge t) + \alpha_2(s_2\wedge t), \\ s\wedge(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) &= \alpha_1(s\wedge t_1) + \alpha_2(s\wedge t_2). \end{aligned} \tag{4.11.6}$$

Здесь α_1 и α_2 — скаляры. Внешнее произведение, однако, некоммутативно; так, если s есть p-форма, а t есть q-форма, то

$$(s \wedge t) = (-1)^{pq} (t \wedge s). \tag{4.11.7}$$

Здесь стоит остановиться и заметить, что в книгах по математической теории дифференциальных форм[1]) p-форму t, вообще говоря, представляют не тензорными компонентами $t_{\mu\nu} \ldots$, а «дифференциальной формой»

$$\omega \equiv t_{\mu\nu} \ldots (dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \ldots).$$

Символ dx^μ означает здесь величину, которая преобразуется как бесконечно малое смещение координат, т. е. как контравариантный вектор; произведения их в отличие от произведений смещений обладают свойствами ассоциативности и *антикоммутативности*:

$$(dx^\mu \wedge dx^\nu) \wedge dx^\lambda = dx^\mu \wedge (dx^\nu \wedge dx^\lambda),$$
$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu.$$

Произведение $\omega_1 \wedge \omega_2$ дифференциальных форм ω_1 и ω_2 имеет тензорные коэффициенты, которые совпадают с внешними произведениями тензорных коэффициентов $t_{\mu\nu} \ldots$ форм ω_1 и ω_2. Свойства ассоциативности и коммутативности (4.11.5) и (4.11.7) внешнего произведения тогда вытекают тривиальным образом из соответствующих свойств произведения $dx^\mu \wedge dx^\nu$. Как уже было сказано, мы не будем пользоваться этим аппаратом; для нас p-форма будет просто антисимметричным тензором безотносительно к соответствующей дифференциальной форме.

Целесообразность развития теории p-форм в независимости от остального тензорного анализа возникает, когда мы изучаем их производные. Оператор частной производной $\partial/\partial x^\mu$ является ковариантным вектором или, другими словами, 1-формой, так что для любой заданной p-формы t можно определить $(p+1)$-форму Dt, называемую *внешней производной* от t, беря просто внешнее произведение $\partial/\partial x$ на t:

$$Dt \equiv \frac{\partial}{\partial x} \wedge t, \tag{4.11.8}$$

или, подробнее,

$$(Dt)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \equiv \text{Antisym} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} t_{\mu_2 \ldots \mu_{p+1}} \right\}. \tag{4.11.9}$$

Например, внешняя производная 0-формы t есть просто обычный градиент:

$$(Dt)_\mu = \frac{\partial t}{\partial x^\mu},$$

[1]) Оптимальным руководством для понимания теории дифференциальных форм является книга [8].

а внешняя производная 1-формы t_μ — просто ротор:

$$(Dt)_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial t_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial t_\mu}{\partial x^\nu}\right).$$

При размерности, равной *трем*, внешняя производная 2-формы t_{ij} сводится к обычной дивергенции:

$$(Dt)_{ijk} = \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial t_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial t_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x^3}\right).$$

Первое замечательное свойство внешней производной — то, что, действуя на тензорную p-форму, она дает *тензорную* $(p+1)$-форму. Самый простой способ убедиться в этом — заметить, что частные производные, используемые при определении внешней производной, можно заменить ковариантными производными

$$(Dt)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} = \mathrm{Antisym}\,(t_{\mu_2 \ldots \mu_{p+1};\,\mu_1}) \tag{4.11.10}$$

поскольку члены с аффинными связностями, появляющиеся при ковариантном дифференцировании, сокращаются при антисимметризации. Полученные выше результаты (4.7.1), (4.7.2) и (4.7.11) оказываются тогда частными случаями выражения (4.11.10) для $p = 0$, $p = 1$ и $p = 2$.

С помощью свойств ассоциативности и коммутативности (4.11.5) и (4.11.7) для внешней производной легко получить простую формулу внешней производной от внешнего произведения p-формы s на q-форму t:

$$\begin{aligned} D(s \wedge t) &= Ds \wedge t + (-1)^{pq}\, Dt \wedge s = \\ &= Ds \wedge t + (-1)^p\, s \wedge Dt. \end{aligned} \tag{4.11.11}$$

Из тех же правил следует, что кратные внешние производные равны нулю, например

$$D^2 t \equiv \frac{\partial}{\partial x} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x} \wedge t\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right) \wedge t = 0. \tag{4.11.12}$$

Этот результат известен как *лемма Пуанкаре*. Среди частных случаев этой леммы имеются два хорошо известных результата векторного анализа в трехмерном пространстве: равенства нулю ротора градиента и дивергенции ротора.

Естественно, возникает вопрос, справедлива ли обратная лемма Пуанкаре, а именно: если s есть $(p+1)$-форма, для которой

$$Ds = 0, \tag{4.11.13}$$

то можем ли мы написать

$$s = Dt \tag{4.11.14}$$

для некоторой p-формы t? Ответ утвердительный при условии, что область $\mathscr{R}$, для которой справедливо (4.11.13) и для которой мы проверяем (4.11.14), может быть деформирована в точку. И вообще, область $\mathscr{R}$ можно деформировать в точку y^μ, если каждая точка x^μ в $\mathscr{R}$ может быть связана с точкой y^μ траекторией $X^\mu(\lambda; x)$, лежащей целиком в $\mathscr{R}$ (λ здесь — действительный параметр, принимающий значения от нуля до единицы), а

$$X^\mu(0; x) = y^\mu, \qquad X^\mu(1; x) = x^\mu.$$

Можно непосредственно удостовериться в том, что если (4.11.13) справедливо в области $\mathscr{R}$, то (4.11.14) будет выполняться во всей этой области для p-формы:

$$t_{\mu_1\ldots\mu_p}(x) = (p+1) \times$$
$$\times \int_0^1 \frac{\partial X^\nu(\lambda; x)}{\partial \lambda} \frac{\partial X^{\nu_1}(\lambda; x)}{\partial x^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial X^{\nu_p}(\lambda; x)}{\partial x^{\mu_p}} s_{\nu\nu_1\ldots\nu_p}(X(\lambda; x))\, d\lambda. \tag{4.11.15}$$

Хорошо известные результаты векторного анализа в трехмерном пространстве, утверждающие, что вектор можно выразить как градиент, если ротор от него равен нулю, или как ротор, если равна нулю его дивергенция, можно рассматривать как частные случаи этой теоремы для $p = 0$ и $p = 1$ соответственно. Уравнения Максвелла — аналогичный пример в четырехмерном пространстве. Тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ является 2-формой, которая, согласно (2.7.10), имеет равную нулю внешнюю производную, так что этот тензор может быть выражен как внешняя производная 1-формы, условно обозначаемая как $-2A_\alpha$:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta},$$

что совпадает с (2.7.11). Вообще говоря, p-форма, удовлетворяющая уравнению (4.11.14), не единственна. При заданном одном t наиболее общая p-форма, удовлетворяющая (4.11.14), есть форма

$$t' = t + Du, \tag{4.11.16}$$

где u — произвольная $(p-1)$-форма. Например, если A_α — один из вектор-потенциалов, ротор которого равен $F_{\alpha\beta}$, то наиболее общий вектор-потенциал такого рода определяется «калибровочным преобразованием»

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha},$$

где Φ является произвольной 0-формой, т. е. произвольным скаляром.

По аналогии с тем, как внешняя производная является естественным обобщением известных операций градиента, ротора и дивергенции, можно построить скалярные интегралы p-форм *над* множеством размерности p, которые окажутся естественным обобщением известных интегралов по объему от скалярных плотностей и поверхностных интегралов от нормальных компонент векторных плотностей. Множество $\mathcal{M}$ размерности p в n-мерном пространстве — это просто область, внутри которой n координат x^μ можно выразить в виде гладких *одно-однозначных* функций от p параметров u^i:

$$x^\mu = x^\mu(u^1, u^2, \ldots, u^p). \tag{4.11.17}$$

В действительности часто не удается покрыть все множество *единственным* набором u-координат. В общем случае необходимо вводить различные наборы u-координат в различных перекрывающихся частях множества с той оговоркой, что для двух перекрывающихся частей, в которых заданы координаты $\bar{u}^i$ и u^i соответственно, в области перекрытия u^i может быть выражена как гладкая одно-однозначная функция от p параметров $\bar{u}^i$, и наоборот. Фактически мы будем встречаться здесь с тем, что называется *ориентируемыми множествами*, т. е. такими множествами, для которых координаты в каждой их части могут быть выбраны так, что в областях перекрытия все детерминанты $|\,\partial u/\partial\bar{u}\,|$ положительно определенны. Поверхность сферы, например, является ориентируемой поверхностью. В дальнейшем мы не встретимся с такими усложнениями, но мы все же должны помнить, что для покрытия множества может потребоваться более чем один набор u-координат. Не забывая о такой возможности, мы определим здесь интеграл от p-формы t над множеством $\mathcal{M}$ размерности p как повторный интеграл

$$\int_{\mathcal{M}} t\, dV_p \equiv \int t_{\mu_1 \ldots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial u^p}\, du^1 \ldots du^p, \tag{4.11.18}$$

в котором пределы интегрирования задаются границами множества.

Этот интеграл ведет себя как скаляр при преобразованиях координат x^μ, использованных для определения p-формы. Необходимо также рассмотреть, как ведет себя этот интеграл, если мы станем описывать множество с помощью нового набора параметров $\bar{u}^1 \ldots \bar{u}^p$ вместо $u^1 \ldots u^p$. Учитывая антисимметрию t, легко видеть, что в этом случае подынтегральное выражение приобретает коэффициент — детерминант $|\,\partial u/\partial\bar{u}\,|$, в то время как p-мерный элемент объема приобретает положительный множитель $\|\,\partial\bar{u}/\partial u\,\|$. Таким образом, весь интеграл либо не изменяется вовсе, либо изменяет знак в зависимости от того, положителен или отрицателен детерминант $|\,\partial u/\partial\bar{u}\,|$. (Мы, конечно, предполагаем, что преобразование $u^i \to \bar{u}^i$ несингулярно, так что этот детерминант не может равняться нулю и, следовательно, сохраняет свой знак на всем $\mathcal{M}$.) Этот результат, между прочим, показывает, что в том случае, когда для покрытия множества необходимо несколько систем u-координат, интеграл от p-формы по области перекрытия двух частей, описываемых координатами u^i и $\bar{u}^i$, может вычисляться в любой из этих систем координат, если детерминант $|\partial u/\partial \bar{u}|$ положителен. Именно по этой причине мы ограничиваемся рассмотрением ориентируемых множеств.

Простейший пример интеграла типа (4.11.18) — это частный случай, когда p равно размерности n координатного пространства x^μ. Здесь сами координаты x^μ могут использоваться как u-координаты, так что (4.11.18) принимает вид

$$\int_{\mathcal{M}} t\, dV_n = \int t_{12\ldots n}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Заметим, что подынтегральное выражение $t_{12\ldots n}$, так же как и однокомпонентный тензор, является скалярной плотностью веса -1, поскольку его можно выразить следующим образом:

$$t_{12\ldots n} = \frac{1}{n!}\, \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_n} t_{\mu_1\ldots\mu_n},$$

а $\varepsilon^{\mu\nu\ldots}$ является тензорной плотностью веса -1 (см. § 4 гл. 4). Следующий простейший пример, получим, полагая в (4.11.18) $p = n - 1$, т. е.

$$\int_{\mathcal{M}} t\, dV_{n-1} = \int t^\mu\, dS_\mu,$$

где t^μ есть векторная плотность

$$t_{\mu_1\ldots\mu_p} \equiv \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\mu} t^\mu,$$

а dS_μ — элемент поверхности, ориентированный по нормали к множеству:

$$dS_\mu \equiv \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\mu} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial u^p}\, du^1 \ldots du^p.$$

С помощью этого общего определения интегралов от p-форм можно доказать, что интеграл от внешней производной p-формы на множестве размерности $(p + 1)$ есть просто интеграл от самой p-формы по p-мерной границе множества (см. [8]):

$$\int_{\mathcal{M}} Dt\, dV_{p+1} = \int_{\text{граница } \mathcal{M}} t\, dV_p. \qquad (4.11.19)$$

(Мы не будем вникать в проблему определения ориентации границы, которая возникает при определении знака в правой части.) Теорема Стокса и теорема Гаусса — это просто частные случаи этой общей формулы при $n = 3$, $p = 1$ и при $n = 3$, $p = 2$ соответственно.