Кто сферами небес
в высотах управляет
Пути планет
в безбрежном небе знает,
Другому нужен
бледный свет Луны...

Александр Поп

Глава 5
ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИИ

Вернемся теперь к физике и попробуем использовать то, чему мы научились в предыдущей главе для исследования того, как влияет гравитация на уравнения механики и электродинамики. Будем пользоваться при этом предписаниями принципа общей ковариантности. Сначала мы должны записать уравнения так, как они выглядят в специальной теории относительности, затем выяснить, как изменится в этих уравнениях каждая величина при произвольных преобразованиях координат, и заменить $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$, а все производные — ковариантными производными. Полученные уравнения будут общековариантны и справедливы в отсутствие гравитации, а следовательно, справедливы в произвольных гравитационных полях при условии, что рассматриваемая система достаточно мала по сравнению с масштабами полей.

§ 1. Механика частицы

Частицы, на которые не действуют никакие силы, обладают в специальной теории относительности постоянной четырехмерной скоростью U^α и постоянным спином S_α, т. е.

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau}=0 \qquad \left(U^\alpha \equiv \frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right), \tag{5.1.1}$$

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau}=0. \tag{5.1.2}$$

Напомним, что спин S_α определен в системе покоя частицы, где спин есть $\{\mathbf{S}, 0\}$, так что в произвольной лоренцевой системе выполняется условие

$$S_\alpha U^\alpha = 0. \tag{5.1.3}$$

Для того чтобы превратить эти уравнения в общековариантные, зададим векторы U^μ и S_μ в произвольной системе координат x^μ

следующим образом:

$$U^{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} U_f{}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau}, \tag{5.1.4}$$

$$S_{\mu} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} S_{f\alpha}, \tag{5.1.5}$$

где $U_f{}^{\alpha}$ и $S_{f\alpha}$ являются компонентами U и S в свободно падающей системе координат ξ^{α}. Хотя U^{μ} и S_{μ} являются векторами, $\partial U^{\mu}/d\tau$ и $dS_{\mu}/d\tau$ ими не являются, но мы констатировали в § 9 гл. 4, что можно определить производные векторов $DU^{\mu}/D\tau$ и $DS_{\mu}/D\tau$, которые сводятся к обычным, когда $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$. Правильные уравнения, задающие положение и спин частицы, диктуются принципом общей ковариантности и имеют вид

$$\frac{DU^{\mu}}{D\tau} = 0, \qquad \frac{DS_{\mu}}{D\tau} = 0 \tag{5.1.6}$$

или, в более подробной записи,

$$\frac{dU^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} U^{\nu} U^{\lambda} = 0, \tag{5.1.7}$$

$$\frac{dS_{\mu}}{d\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} U^{\nu} S_{\lambda} = 0. \tag{5.1.8}$$

Кроме того, (5.1.3) следует записать теперь так:

$$S_{\mu} U^{\mu} = 0. \tag{5.1.9}$$

Повторяя рассуждения § 1 гл. 4, заметим, что эти уравнения справедливы в присутствии гравитационных полей, поскольку они общековариантны, и справедливы в отсутствие гравитации, поскольку превращаются в уравнения (5.1.1) — (5.1.3), когда исчезает $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$. Принцип эквивалентности, таким образом, утверждает, что существуют локально-инерциальные системы координат, в которых (5.1.6) — (5.1.9) справедливы (при непременном условии достаточной малости рассматриваемой частицы), а общая ковариантность гарантирует, что эти уравнения выполняются и в лабораторной системе отсчета.

В уравнениях (5.1.7) и (5.1.8) мы узнаем дифференциальные уравнения параллельного переноса векторов U^{μ} и S_{μ}. Поскольку $U^{\mu} \equiv dx^{\mu}/d\tau$, уравнение (5.1.7) не что иное, как известное уравнение для свободного падения, которое было получено выше путем дифференцирования (5.1.4) по τ и подстановки (5.1.1). Очевидно, что мы избегаем утомительных вычислений, используя общую ковариантность. Уравнение (5.1.8) описывает прецессию гироскопа при свободном падении и будет обсуждаться в гл. 9. Здесь

отметим только, что произведение $S_\mu S^\mu$ постоянно, поскольку обычная производная от скаляра — это то же самое, что его ковариантная производная

$$\frac{d}{d\tau}(S_\mu S^\mu) = \frac{D}{D\tau}(S_\mu S^\mu) = 0. \tag{5.1.10}$$

Если частица не находится в состоянии свободного падения, то производная $DU^\mu/D\tau$ не равна нулю и вместо (5.1.7) надо писать

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} \equiv \frac{f^\mu}{m}, \tag{5.1.11}$$

где m — масса частицы, а f^μ — контравариантный вектор силы. Последнее можно записать и так:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu - m\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}.$$

Член, содержащий $m\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$, играет роль гравитационной силы. Мы можем всегда вычислить f^μ, если знаем его значение f^α_f в свободно падающей системе отсчета ξ^α. Действительно, условие, требующее, чтобы сила f^μ вела себя как вектор, позволяет записать его единственным способом:

$$f^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} f^\alpha_f. \tag{5.1.12}$$

Электромагнитная сила будет определена в следующем параграфе.

Иногда оказывается, что на частицу действует сила, которая не создает крутящего момента. В этом случае наблюдатель в локально-инерциальной системе отсчета, находящийся в данный момент в покое относительно частицы, не будет наблюдать никакой прецессии оси спина, т. е. $d\mathbf{S}/dt$ будет равна нулю. Но при таком выборе системы координат $d\mathbf{x}/dt$ также исчезает, и мы можем записать в общем виде условие отсутствия крутящего момента в лоренц-инвариантной форме:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} \sim U^\alpha.$$

Это условие будет оставаться справедливым в любой локально-инерциальной системе координат, в сопутствующей и любой другой. Возникает вопрос о коэффициенте пропорциональности. Положим, что

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \Phi U^\alpha.$$

Вспомним теперь, что S_α определяется так, что $S_\alpha U^\alpha = 0$. Это приводит к соотношению

$$\frac{d}{d\tau}(S_\alpha U^\alpha) = \Phi U_\alpha U^\alpha + S_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0,$$

а потому

$$\Phi = S_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = S_\alpha \frac{f^\alpha}{m}.$$

Следовательно, вектор спина изменяется согласно уравнению

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \left(S_\beta \frac{f^\beta}{m}\right) U^\alpha. \tag{5.1.13}$$

Это явление известно как *томасовская прецессия* [1]. Если мы теперь включим гравитационное поле, уравнение (5.1.13) и принцип общей ковариантности приведут нас к следующему закону для прецессии спина:

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = \left(S_\nu \frac{f^\nu}{m}\right) U^\mu = S_\nu \frac{DU^\nu}{D\tau} U^\mu. \tag{5.1.14}$$

Принято говорить, что вектор, удовлетворяющий этому дифференциальному уравнению, подвергается *переносу Ферми* [2]. Параллельный перенос — это специальный случай, имеющий место при $f^\mu = 0$.

§ 2. Электродинамика

Напомним, что в отсутствие гравитационных полей электродинамические уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \tag{5.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\beta} = 0, \tag{5.2.2}$$

где J^β есть 4-вектор $\{\mathbf{J}, \varepsilon\}$, а $F^{\alpha\beta}$ — тензор электромагнитного поля, причем $F^{12} = B_3$, $F^{01} = E_1$ и т. д. (см. § 7 гл. 2). Предположим, что мы *задаем* $F^{\mu\nu}$ и J^μ в произвольных координатах, требуя, чтобы они сводились к $F^{\alpha\beta}$ и J^β в локально-инерциальных координатах Минковского и чтобы они вели себя, как тензоры при произвольных преобразованиях координат (т. е. если $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{J}^\alpha$ — значения, измеренные в локально-инерциальной системе отсчета, то справедливы соотношения $F^{\mu\nu} \equiv (\partial x^\mu/\partial \xi^\alpha)(\partial x^\nu/\partial \xi^\beta)\tilde{F}^{\alpha\beta}$ и $J^\mu \equiv (\partial x^\mu/\partial \xi^\alpha)\tilde{J}^\alpha$). Можно тогда *превратить уравнения* (5.2.1) и (5.2.2) в общековариантные, заменяя все производные ковариантными производными:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\,\mu} = -J^\nu, \tag{5.2.3}$$

$$F_{\mu\nu;\,\lambda} + F_{\lambda\mu;\,\nu} + F_{\nu\lambda;\,\mu} = 0. \tag{5.2.4}$$