а потому

$$\Phi = S_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = S_\alpha \frac{f^\alpha}{m}.$$

Следовательно, вектор спина изменяется согласно уравнению

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \left(S_\beta \frac{f^\beta}{m}\right) U^\alpha. \tag{5.1.13}$$

Это явление известно как *томасовская прецессия* [1]. Если мы теперь включим гравитационное поле, уравнение (5.1.13) и принцип общей ковариантности приведут нас к следующему закону для прецессии спина:

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = \left(S_\nu \frac{f^\nu}{m}\right) U^\mu = S_\nu \frac{DU^\nu}{D\tau} U^\mu. \tag{5.1.14}$$

Принято говорить, что вектор, удовлетворяющий этому дифференциальному уравнению, подвергается *переносу Ферми* [2]. Параллельный перенос — это специальный случай, имеющий место при $f^\mu = 0$.

§ 2. Электродинамика

Напомним, что в отсутствие гравитационных полей электродинамические уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \tag{5.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\beta} = 0, \tag{5.2.2}$$

где J^β есть 4-вектор $\{\mathbf{J}, \varepsilon\}$, а $F^{\alpha\beta}$ — тензор электромагнитного поля, причем $F^{12} = B_3$, $F^{01} = E_1$ и т. д. (см. § 7 гл. 2). Предположим, что мы *задаем* $F^{\mu\nu}$ и J^μ в произвольных координатах, требуя, чтобы они сводились к $F^{\alpha\beta}$ и J^β в локально-инерциальных координатах Минковского и чтобы они вели себя, как тензоры при произвольных преобразованиях координат (т. е. если $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{J}^\alpha$ — значения, измеренные в локально-инерциальной системе отсчета, то справедливы соотношения $F^{\mu\nu} \equiv (\partial x^\mu/\partial \xi^\alpha)(\partial x^\nu/\partial \xi^\beta)\tilde{F}^{\alpha\beta}$ и $J^\mu \equiv (\partial x^\mu/\partial \xi^\alpha)\tilde{J}^\alpha$). Можно тогда *превратить уравнения* (5.2.1) и (5.2.2) в общековариантные, заменяя все производные ковариантными производными:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\,\mu} = -J^\nu, \tag{5.2.3}$$

$$F_{\mu\nu;\,\lambda} + F_{\lambda\mu;\,\nu} + F_{\nu\lambda;\,\mu} = 0. \tag{5.2.4}$$

Индексы теперь, естественно, следует поднимать и опускать с помощью $g_{\mu\lambda}$, а не $\eta_{\alpha\gamma}$, т. е.

$$F_{\lambda\varkappa} \equiv g_{\lambda\mu} g_{\varkappa\nu} F^{\mu\nu}. \tag{5.2.5}$$

Так как $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$ антисимметричны, уравнения Максвелла можно переписать с помощью (4.7.10) и (4.7.11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{g}\, F^{\mu\nu} = -\sqrt{g}\, J^\nu, \tag{5.2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\lambda\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\lambda} = 0. \tag{5.2.7}$$

Уравнения (5.2.3) — (5.2.7) справедливы в отсутствие гравитации и общековариантны, а потому, согласно принципу общей ковариантности, справедливы также в произвольных гравитационных полях.

Электромагнитная сила, действующая на частицу с зарядом e, в отсутствие гравитации имеет вид (2.7.9)

$$f^\alpha = e F^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{5.2.8}$$

Отсюда сразу следует, что в произвольных координатах электромагнитная сила в произвольном гравитационном поле равна

$$f^\mu = e F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \tag{5.2.9}$$

где, естественно,

$$F^\mu{}_\nu \equiv g_{\nu\lambda} F^{\mu\lambda}. \tag{5.2.10}$$

И снова мы воспользуемся принципом общей ковариантности. Уравнение (5.2.9), очевидно, сводится к (5.2.8) в локально-инерциальных координатах Минковского и является общековариантным, поскольку f^μ — это вектор (см. § 1 гл. 5), $dx^\nu/d\tau$ — вектор, а F^μ_ν *определено* как тензор; следовательно, формула (5.2.9) написана правильно.

Поучительно вычислить вектор тока J^ν. В специальной теории относительности он равен

$$J^\alpha = \sum_n e_n \int \delta^4(x - x_n)\, dx_n^\alpha, \tag{5.2.11}$$

причем интеграл берется вдоль траектории n-й частицы [см. уравнение (2.6.5)]. Четырехмерная дельта-функция в произвольной системе координат вводится следующим образом:

$$\int d^4x \Phi(x)\, \delta^4(x - y) = \Phi(y). \tag{5.2.12}$$

Так как $g^{1/2}\,d^4x$ есть скаляр, то комбинация $g^{-1/2}\delta^4(x-y)$ тоже должна быть скаляром, который, конечно, сводится к обычной дельта-функции в специальной теории относительности, где $g=1$ (именно этот скаляр в некоторых работах определяется как дельта-функция). Таким образом, ковариантный вектор, который сводится к J^α в отсутствие гравитации, равен

$$J^\mu(x)=g^{-1/2}(x)\sum_n e_n\int\delta^4(x-x_n)\,dx_n^\mu. \tag{5.2.13}$$

Заметим, что закон сохранения ($\partial J^\alpha/\partial x^\alpha=0$) специальной теории относительности в общей теории имеет вид $J^\mu{}_{;\mu}=0$, или, с учетом (4.7.7),

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(g^{1/2}J^\mu)=0. \tag{5.2.14}$$

Множитель $g^{-1/2}$ в (5.2.13) необходим для того, чтобы компенсировать $g^{1/2}$ в (5.2.14), так что (5.2.14) просто выражает факт постоянства e_n.

§ 3. Тензор энергии-импульса

Плотность и поток энергии и импульса были объединены в § 2.8 в симметричный тензор $T^{\alpha\beta}$, удовлетворяющий закону сохранения

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}=G^\beta, \tag{5.3.1}$$

где G^β является плотностью внешней силы f^β, действующей на систему. (В изолированной системе имеем $G^\beta=0$.) Определим $T^{\mu\nu}$ и G^ν как контравариантные тензоры, которые совпадают с соответствующими величинами $T^{\alpha\beta}$ и G^β в отсутствие гравитации. Тогда общековариантное уравнение, которое согласуется с (5.3.1) в локально-инерциальных системах, имеет вид

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu}=G^\nu \tag{5.3.2}$$

или, с учетом (4.7.9),

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{g}\,T^{\mu\nu})=G^\nu-\Gamma^\nu_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}. \tag{5.3.3}$$

Коэффициент $\sqrt{g}$ знаком уже нам из электродинамики и возникает как следствие того, что инвариантный объем равен $\sqrt{g}\,d^4x$. Второй член в правой части уравнения представляет собой *плотность* гравитационной *силы*. Как и следовало ожидать, эта сила зависит от системы, на которую она действует, только через тензор энергии-импульса.