Так как $g^{1/2}\,d^4x$ есть скаляр, то комбинация $g^{-1/2}\delta^4(x-y)$ тоже должна быть скаляром, который, конечно, сводится к обычной дельта-функции в специальной теории относительности, где $g=1$ (именно этот скаляр в некоторых работах определяется как дельта-функция). Таким образом, ковариантный вектор, который сводится к J^α в отсутствие гравитации, равен

$$J^\mu(x)=g^{-1/2}(x)\sum_n e_n\int\delta^4(x-x_n)\,dx_n^\mu. \tag{5.2.13}$$

Заметим, что закон сохранения ($\partial J^\alpha/\partial x^\alpha=0$) специальной теории относительности в общей теории имеет вид $J^\mu{}_{;\mu}=0$, или, с учетом (4.7.7),

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(g^{1/2}J^\mu)=0. \tag{5.2.14}$$

Множитель $g^{-1/2}$ в (5.2.13) необходим для того, чтобы компенсировать $g^{1/2}$ в (5.2.14), так что (5.2.14) просто выражает факт постоянства e_n.

§ 3. Тензор энергии-импульса

Плотность и поток энергии и импульса были объединены в § 2.8 в симметричный тензор $T^{\alpha\beta}$, удовлетворяющий закону сохранения

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}=G^\beta, \tag{5.3.1}$$

где G^β является плотностью внешней силы f^β, действующей на систему. (В изолированной системе имеем $G^\beta=0$.) Определим $T^{\mu\nu}$ и G^ν как контравариантные тензоры, которые совпадают с соответствующими величинами $T^{\alpha\beta}$ и G^β в отсутствие гравитации. Тогда общековариантное уравнение, которое согласуется с (5.3.1) в локально-инерциальных системах, имеет вид

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu}=G^\nu \tag{5.3.2}$$

или, с учетом (4.7.9),

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{g}\,T^{\mu\nu})=G^\nu-\Gamma^\nu_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}. \tag{5.3.3}$$

Коэффициент $\sqrt{g}$ знаком уже нам из электродинамики и возникает как следствие того, что инвариантный объем равен $\sqrt{g}\,d^4x$. Второй член в правой части уравнения представляет собой *плотность* гравитационной *силы*. Как и следовало ожидать, эта сила зависит от системы, на которую она действует, только через тензор энергии-импульса.

Тензор энергии-импульса системы точечных частиц в специальной теории относительности задается (см. § 8 гл. 2) в виде

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n m_n \int \frac{dx_n{}^\alpha}{d\tau} dx_n{}^\beta \delta^4(x - x_n), \tag{5.3.4}$$

причем интеграл здесь берется вдоль траектории частицы. Следуя точно тем же рецептам, что и при рассмотрении J^μ в предыдущем параграфе, приходим к заключению, что контравариантный тензор, согласующийся с (5.3.4) в отсутствие гравитации, равен

$$T^{\mu\nu} = g^{-1/2} \sum_n m_n \int \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau} dx_n{}^\nu \delta^4(x - x_n). \tag{5.3.5}$$

Тензор энергии-импульса $F^{\alpha\beta}$ электромагнитного поля в специальной теории относительности был вычислен в § 8 гл. 2 и имел вид

$$T^{\alpha\beta} = F^\alpha{}_\gamma F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}. \tag{5.3.6}$$

Не составляет никакого труда убедиться в том, что контравариантный тензор, согласующийся с (5.3.6) в отсутствие гравитации, есть

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\lambda\varkappa} F^{\lambda\varkappa}. \tag{5.3.7}$$

Для системы, состоящей из частиц и излучения, тензор энергии-импульса есть сумма (5.3.5) и (5.3.7).

Возвращаясь к тензору энергии-импульса (5.3.5) только для вещества, легко вычислить

$$\int T^{\mu 0} g^{1/2} d^3x = \sum_n m_n \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau},$$

где сумма включает все частицы в объеме, по которому ведется интегрирование. Это предполагает, что $T^{\mu 0} g^{1/2}$ надо рассматривать, вообще говоря, как пространственную плотность энергии и импульса. Отсюда, в частности, можно найти энергию, импульс и угловой момент для произвольной системы

$$P^\mu \equiv \int T^{\mu 0} g^{1/2} d^3x, \tag{5.3.8}$$

$$J^{\mu\nu} \equiv \int (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) g^{1/2} d^3x \tag{5.3.9}$$

Однако эти величины не являются контравариантными тензорами и не сохраняются, поскольку не сохраняется $T^{\mu\nu} g^{1/2}$, т. е. $\partial (T^{\mu\nu} g^{1/2})/\partial x^\nu$ не обращается в нуль ввиду того, что между веществом и гравитацией происходит обмен энергией и импульсом.