§ 4. Гидродинамика и гидростатика

В отсутствие гравитации тензор энергии-импульса идеальной жидкости задается формулой (2.10.7)

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)\, U^\alpha U^\beta, \tag{5.4.1}$$

где U^α есть четырехмерная скорость жидкости, а $U^0 = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$, $\mathbf{U} = \mathbf{v}U^0$. Контравариантный тензор, который сводится к (5.4.1) в отсутствие гравитации, записывается в виде

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p+\rho)\, U^\mu U^\nu, \tag{5.4.2}$$

где U^μ есть локальное значение $dx^\mu/d\tau$ для элемента жидкости в сопутствующей системе отсчета. Отметим, что p и ρ всегда определяются как плотность давления и энергии, измеряемые наблюдателем в локально-инерциальной системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью в момент проведения измерения, и, следовательно, они являются скалярами. Условия сохранения тензора энергии-импульса приводят к гидродинамическим уравнениям:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{1/2} (p+\rho)\, U^\mu U^\nu + \\ + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} (p+\rho)\, U^\nu U^\lambda = 0. \tag{5.4.3}$$

Последний член здесь представляет собой гравитационную силу, действующую на систему. Заметим также, что, поскольку $\eta_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = -1$ в отсутствие гравитации, мы должны и при наличии гравитации писать

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1. \tag{5.4.4}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда жидкость находится в состоянии гидростатического равновесия. Поскольку жидкость не движется, (5.4.4) приводит к выражениям

$$U^0 = (-g_{00})^{-1/2} \qquad U^\lambda = 0 \text{ для } \lambda \neq 0.$$

Кроме того, все производные по времени от $g_{\mu\nu}$, p, или ρ исчезают. В частности, имеем

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} [(p+\rho)\, U^\mu U^\nu] = 0.$$

Умножая (5.4.3) на $g_{\mu\lambda}$, получаем

$$-\frac{\partial p}{\partial x^\lambda} = (p+\rho) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln(-g_{00})^{1/2}. \tag{5.4.5}$$

Это условие тривиально для $\lambda = 0$, тогда как для пространственноподобных значений λ (5.4.5) есть не что иное, как обычное нерелятивистское условие гидростатического равновесия, с той лишь разницей, что вместо плотности массы появляется $p + \rho$, а вместо гравитационного потенциала появляется $(-g_{00})^{1/2}$. Это уравнение решается, если давление p задано как функция ρ. Решение имеет вид

$$\int \frac{dp(\rho)}{p(\rho)+\rho} = -\ln \sqrt{-g_{00}} + \text{const}. \tag{5.4.6}$$

Например, если зависимость $p(\rho)$ степенная,

$$p(\rho) \sim \rho^N, \tag{5.4.7}$$

то (5.4.6) для $N \neq 1$ выглядит так:

$$\frac{\rho+p}{\rho} \sim (-g_{00})^{(1-N)/2N}, \tag{5.4.8}$$

а для $N=1$

$$\rho \sim (-g_{00})^{-(p+\rho)/2p}. \tag{5.4.9}$$

Это, между прочим, показывает, что при $p = \rho/3$ гравитация никогда не может поддерживать равновесие в крайне релятивистской жидкости, находящейся в конечном объеме, поскольку в этом случае (5.4.9) имеет вид

$$\rho \sim (-g_{00})^{-2}. \tag{5.4.10}$$

Так как ρ должно быть равно нулю вне жидкости, g_{00} становится сингулярным на ее поверхности.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomas L. H.*, Nature, **117**, 514 (1926).
2. *Fermi E.*, Atti. R. Accad. Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., **31**, 21 (1922).