Когда внимаю звездному ночному небу
И знакам грандиозным и туманным...

Дж. Китс, Когда мне страшно, что жизнь моя прервется...

Глава 6
КРИВИЗНА

Перейдем теперь к решению уравнений гравитационного поля, применяя принцип эквивалентности к самой гравитации. Как и в предыдущей главе, наиболее удобный путь использования этого принципа — это отыскание уравнений поля в общековариантном виде и сведение их затем к соответствующей форме в случае слабых полей. Итак, зададимся вопросом: какие тензоры можно образовать из метрического тензора и его производных? В данной главе мы рассмотрим это в чисто математическом аспекте, как в свое время это делали Гаусс и Риман. Информация, которую мы приобретем, будет использована в следующей главе; она поможет нам исследовать уравнения поля гравитации.

§ 1. Определение тензора кривизны

Нам надо построить тензор из метрического тензора и его производных. Если использовать только $g_{\mu\nu}$ и его первые производные, то никакого нового тензора построить нельзя, поскольку в любой точке можно найти систему координат, в которой первые производные метрического тензора исчезают. Таким образом, в этой системе координат искомый тензор должен равняться одному из тех, что могут быть построены из *одного лишь* метрического тензора (например, $g_{\mu\nu}$ или $g^{\mu\nu}$, или $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\eta}/\sqrt{g}$ и т. д.), а поскольку это равенство между тензорами, оно должно выполняться во всех системах координат.

Теперь попытаемся построить тензор из метрического тензора и его первых и вторых производных. Чтобы сделать это, вспомним правило преобразования аффинной связности:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}+\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}. \tag{6.1.1}$$

[Это — соотношение (4.5.2), в котором переставлены штрихованные и нештрихованные координаты.] В правой части этого соотношения имеется неоднородность, портящая тензорный характер

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, а потому мы попробуем ее изолировать:

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \tag{6.1.2}$$

Чтобы избавиться от левой части, используем некоммутативность частных производных. Дифференцирование по $x^\varkappa$ дает

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\varkappa \partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\varkappa\lambda} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\varkappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \right) -$$
$$- \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\varkappa\nu} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\varkappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\nu} \Gamma'^\sigma_{\eta\xi} \right) -$$
$$- \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\varkappa\mu} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\varkappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\mu} \Gamma'^\rho_{\eta\xi} \right) +$$
$$+ \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\varkappa} \frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta}.$$

Собрав подобные члены и переставив некоторые индексы, получим

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\varkappa \partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\varkappa\eta} \right) -$$
$$- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\varkappa} \left(\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} - \Gamma'^\tau_{\rho\lambda} \Gamma'^\lambda_{\eta\sigma} - \Gamma'^\tau_{\lambda\sigma} \Gamma'^\lambda_{\eta\rho} \right) -$$
$$- \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\lambda_{\varkappa\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\varkappa\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \right). \tag{6.1.3}$$

Вычитая затем отсюда то же самое уравнение с переставленными индексами ν и $\varkappa$, находим, что все члены, включающие произведения Γ на Γ', исчезают, и остается следующее выражение:

$$0 = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\varkappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\varkappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\varkappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} \right) -$$
$$- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\varkappa} \left(\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\eta}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma'^\tau_{\lambda\sigma} \Gamma'^\lambda_{\eta\rho} + \Gamma'^\tau_{\lambda\eta} \Gamma'^\lambda_{\sigma\rho} \right).$$

Его можно переписать в виде формулы преобразования

$$R'^\tau{}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\eta} R^\lambda{}_{\mu\nu\varkappa}, \tag{6.1.4}$$

где

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\varkappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\varkappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\varkappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\varkappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}. \tag{6.1.5}$$

Уравнение (6.1.4) утверждает, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ есть тензор; его называют *тензором кривизны Римана — Кристоффеля.*

Существование тензора $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ снова поднимает вопрос о том, единственным ли образом определяет принцип общей ковариантности (или принцип эквивалентности) гравитационные эффекты в произвольных физических системах. Зададимся, например, вопросом, может ли оставаться корректным уравнение движения свободно падающей частицы со спином S_{μ}, имеющее вид

$$0=\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}+fR^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}S^{\varkappa} \qquad (6.1.6)$$

(где f — неизвестный скаляр) наряду с известным уравнением

$$0=\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}. \qquad (6.1.7)$$

Оба уравнения являются общековариантными и оба сводятся в отсутствие гравитации к соответствующему уравнению специальной теории относительности $dU^{\alpha}/d\tau = 0$. Как же тогда отличить, какое из них правильное?

Критерий опять тот же — масштаб. Предположим, что наша частица имеет характерный линейный размер d, а гравитационное поле характеризуется пространственно-временным масштабом D. Тензор Римана — Кристоффеля имеет на одну производную от метрики больше, чем аффинная связность, так что отношение третьего члена (6.1.6) ко второму члену пропорционально $1/D$; соображения размерности тогда требуют, чтобы их отношение было, грубо говоря, порядка d/D. Таким образом, исключая специальные случаи, когда тот или иной член аномально велик или мал, можно считать, что последний член в (6.1.6) пренебрежимо мал, если рассматриваемая частица намного меньше, чем характерные размеры гравитационного поля; тогда (6.1.7) является правильным уравнением движения. Конечно, если наша частица не слишком мала в масштабах гравитационного поля (как в случае Луны, движущейся в гравитационном поле Земли), то принцип общей ковариантности и принцип эквивалентности должны применяться к бесконечно малым элементам, из которых состоит частица, но при этом (6.1.6) или (6.1.7) могли бы дать разумное феноменологическое описание движения частицы в целом.

§ 2. Единственность тензора кривизны

Теперь докажем, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ является *единственным* тензором, который можно построить из метрического тензора и его первых и вторых производных, и что построенный тензор линеен по вторым производным.