Уравнение (6.1.4) утверждает, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ есть тензор; его называют *тензором кривизны Римана — Кристоффеля.*

Существование тензора $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ снова поднимает вопрос о том, единственным ли образом определяет принцип общей ковариантности (или принцип эквивалентности) гравитационные эффекты в произвольных физических системах. Зададимся, например, вопросом, может ли оставаться корректным уравнение движения свободно падающей частицы со спином S_{μ}, имеющее вид

$$0=\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}+fR^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}S^{\varkappa} \qquad (6.1.6)$$

(где f — неизвестный скаляр) наряду с известным уравнением

$$0=\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}. \qquad (6.1.7)$$

Оба уравнения являются общековариантными и оба сводятся в отсутствие гравитации к соответствующему уравнению специальной теории относительности $dU^{\alpha}/d\tau=0$. Как же тогда отличить, какое из них правильное?

Критерий опять тот же — масштаб. Предположим, что наша частица имеет характерный линейный размер d, а гравитационное поле характеризуется пространственно-временным масштабом D. Тензор Римана — Кристоффеля имеет на одну производную от метрики больше, чем аффинная связность, так что отношение третьего члена (6.1.6) ко второму члену пропорционально $1/D$; соображения размерности тогда требуют, чтобы их отношение было, грубо говоря, порядка d/D. Таким образом, исключая специальные случаи, когда тот или иной член аномально велик или мал, можно считать, что последний член в (6.1.6) пренебрежимо мал, если рассматриваемая частица намного меньше, чем характерные размеры гравитационного поля; тогда (6.1.7) является правильным уравнением движения. Конечно, если наша частица не слишком мала в масштабах гравитационного поля (как в случае Луны, движущейся в гравитационном поле Земли), то принцип общей ковариантности и принцип эквивалентности должны применяться к бесконечно малым элементам, из которых состоит частица, но при этом (6.1.6) или (6.1.7) могли бы дать разумное феноменологическое описание движения частицы в целом.

§ 2. Единственность тензора кривизны

Теперь докажем, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ является *единственным* тензором, который можно построить из метрического тензора и его первых и вторых производных, и что построенный тензор линеен по вторым производным.

Для этой цели оказывается очень удобным привязаться к какой-нибудь точке X и выбрать локально-инерциальную систему координат, в которой аффинная связность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ в этой точке равна нулю. Кроме того, будем рассматривать только ограниченный класс преобразований координат, оставляющих аффинную связность нулевой. Согласно уравнению (6.1.1), это просто преобразования $x \to x'$, для которых выполняется условие

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\right)_{x=X} = 0. \tag{6.2.1}$$

Любая величина, изменяющаяся как тензор при произвольных преобразованиях координат, должна преобразовываться как тензор и на ограниченном классе подобных преобразований. Таким образом, это требование оказывается достаточно сильным для наших целей.

Так как афинная связность исчезает в точке X, то все первые производные метрического тензора исчезают в этой точке [см. выражение (3.3.5)] и искомый тензор должен быть линейной комбинацией лишь вторых производных от метрического тензора или, эквивалентно, первых производных аффинной связности. Из уравнения (6.1.3) видно, что, когда $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}$ равны нулю, производные аффинной связности подчиняются при $x = X$ правилу преобразования

$$\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}. \tag{6.2.2}$$

Какую линейную комбинацию $\partial\Gamma/\partial x$ следует взять, чтобы она вела себя как тензор? Ясно, что она должна быть такой, чтобы исчезал неоднородный член в правиле преобразования. Однако в любой данной точке X неоднородный член есть полностью произвольная функция его индексов ρ, σ, η, на которую накладывается единственное условие, чтобы она была симметрична по этим индексам. Следовательно, единственный способ составления линейной комбинации $\partial\Gamma/\partial x$, которая будет преобразовываться, подобно тензору, при всех переходах $x \to x'$, удовлетворяющих (6.2.1), это антисимметризация индексов $\varkappa$ и ν (или, эквивалентно, $\varkappa$ и μ), превращающая (6.2.2) при $x = X$ в соотношение

$$T'^{\tau}{}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} T^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa},$$

где в точке $x = X$ имеем

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}}. \tag{6.2.3}$$

Таким образом, искомый тензор должен равняться тензору $T^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$, задаваемому выражением (6.2.3), когда Г исчезает. Однако, когда $\Gamma = 0$, тензор Римана — Кристоффеля удовлетворяет (6.2.3), так что в локально-инерциальной системе $T^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa} = R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$. Но это — равенство между тензорами, а потому, если оно справедливо в одном классе систем координат, оно справедливо во всех системах координат. Отсюда следует, что единственный тензор T искомого вида есть как раз $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$.

Естественно, используя метрический тензор, можно строить и другие тензоры из линейных комбинаций $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$. Наиболее замечательными являются свернутые формы: *тензор Риччи*, равный

$$R_{\mu\varkappa} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\varkappa}, \tag{6.2.4}$$

и *скалярная кривизна*

$$R = g^{\mu\varkappa} R_{\mu\varkappa}. \tag{6.2.5}$$

§ 3. Обход вдоль замкнутого контура с помощью параллельного переноса

Рассмотрим задачу, которая интересна и сама по себе и будет нужна нам для подготовки к следующему параграфу. Зададимся вопросом, вернется ли вектор S_μ в свое первоначальное положение после переноса его вдоль замкнутой кривой C, осуществленного по правилам параллельного переноса (см. § 9 гл. 4 и § 1 гл. 5):

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} S_\lambda. \tag{6.3.1}$$

Можно ответить на этот вопрос, используя тот же метод, что и при доказательстве теоремы Стокса. Рассмотрим кривую C как край некоторой двумерной поверхности A и разобьем A на малые ячейки, ограниченные малыми замкнутыми кривыми C_N. Изменение S_μ при параллельном переносе вдоль C может быть записано как сумма изменений S_μ, когда этот вектор переносится по каждой из этих малых кривых C_N:

$$\Delta S_\mu = \sum_N \Delta_N S_\mu; \tag{6.3.2}$$

поскольку изменение S_μ при обходе по границе любой внутренней ячейки компенсируется изменениями за счет обходов смежных ячеек, остаются только вклады от краев внешних ячеек, которые составляют C. Следовательно, нужно выяснить: изменяется ли S_μ при параллельном переносе по малой замкнутой кривой? Если кривая достаточно мала, вблизи некоторой