Таким образом, искомый тензор должен равняться тензору $T^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$, задаваемому выражением (6.2.3), когда Г исчезает. Однако, когда $\Gamma = 0$, тензор Римана — Кристоффеля удовлетворяет (6.2.3), так что в локально-инерциальной системе $T^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa} = R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$. Но это — равенство между тензорами, а потому, если оно справедливо в одном классе систем координат, оно справедливо во всех системах координат. Отсюда следует, что единственный тензор T искомого вида есть как раз $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$.

Естественно, используя метрический тензор, можно строить и другие тензоры из линейных комбинаций $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$. Наиболее замечательными являются свернутые формы: *тензор Риччи*, равный

$$R_{\mu\varkappa} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\varkappa}, \tag{6.2.4}$$

и *скалярная кривизна*

$$R = g^{\mu\varkappa} R_{\mu\varkappa}. \tag{6.2.5}$$

§ 3. Обход вдоль замкнутого контура с помощью параллельного переноса

Рассмотрим задачу, которая интересна и сама по себе и будет нужна нам для подготовки к следующему параграфу. Зададимся вопросом, вернется ли вектор S_μ в свое первоначальное положение после переноса его вдоль замкнутой кривой C, осуществленного по правилам параллельного переноса (см. § 9 гл. 4 и § 1 гл. 5):

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} S_\lambda. \tag{6.3.1}$$

Можно ответить на этот вопрос, используя тот же метод, что и при доказательстве теоремы Стокса. Рассмотрим кривую C как край некоторой двумерной поверхности A и разобьем A на малые ячейки, ограниченные малыми замкнутыми кривыми C_N. Изменение S_μ при параллельном переносе вдоль C может быть записано как сумма изменений S_μ, когда этот вектор переносится по каждой из этих малых кривых C_N:

$$\Delta S_\mu = \sum_N \Delta_N S_\mu; \tag{6.3.2}$$

поскольку изменение S_μ при обходе по границе любой внутренней ячейки компенсируется изменениями за счет обходов смежных ячеек, остаются только вклады от краев внешних ячеек, которые составляют C. Следовательно, нужно выяснить: изменяется ли S_μ при параллельном переносе по малой замкнутой кривой? Если кривая достаточно мала, вблизи некоторой

точки $x \equiv x(\tau_0)$, лежащей на кривой, можно разложить $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ следующим образом:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + (x^{\rho} - X^{\rho}) \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + \ldots \qquad (6.3.3)$$

Тогда (6.3.1) в первом порядке по $x^{\mu} - X^{\mu}$ дает

$$S_{\mu}(\tau) = S_{\mu}(\tau_0) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X)(x^{\nu}(\tau) - X^{\nu}) S_{\lambda}(\tau_0) + \ldots, \qquad (6.3.4)$$

и, подставляя (6.3.3) и (6.3.4) в (6.3.1), получаем уравнение, включающее члены второго порядка,

$$S_{\mu}(\tau) \approx S_{\mu}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + (x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}) \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + \ldots \right] \times$$
$$\times [S_{\lambda}(\tau_0) + S_{\sigma}(\tau_0) \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}(X)(x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}) + \ldots] \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Отбрасывая члены третьего порядка и выше по $x - X$, имеем

$$S_{\mu}(\tau) \approx S_{\mu}(\tau_0) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) S_{\lambda}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\delta}_{\mu\nu}(X) + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}(X) \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) \right\} \times S_{\sigma}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} (x^{\rho} - X^{\rho}) \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau.$$

Если $x^{\mu}(\tau)$ возвращается к его первоначальному значению X при некотором $\tau = \tau_1$, тогда, очевидно, получаем

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau = 0,$$

так что при параллельном переносе по малой замкнутой кривой $x^{\mu}(\tau)$ изменение S_{μ} второго порядка

$$\Delta S_{\mu} \equiv S_{\mu}(\tau_1) - S_{\mu}(\tau_0) =$$
$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(X) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}(X) \right\} S_{\sigma}(\tau_0) \oint x^{\rho} dx^{\nu}, \qquad (6.3.5)$$

где

$$\oint x^{\rho} dx^{\nu} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau.$$

Этот интеграл, вообще говоря, не исчезает. Если, например, контур интегрирования представляет собой малый параллелограмм со сторонами δa^{μ} и δb^{μ}, то интеграл равен

$$\oint x^{\rho} dx^{\nu} = \delta a^{\rho} \delta b^{\nu} - \delta a^{\nu} \delta b^{\rho}.$$

Интегрируя по частям, можно убедиться в том, что это выражение всегда антисимметрично по ρ и ν:

$$\oint x^\rho\, dx^\nu = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}(x^\rho x^\nu)\, d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau}\, d\tau = -\oint x^\nu\, dx^\rho. \quad (6.3.6)$$

В коэффициенте при интеграле в (6.3.5), исходя из этого, можно оставить только антисимметричную часть, которая составляет как раз половину тензора кривизны (6.1.5), а потому

$$\Delta S_\mu = \frac{1}{2} R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} S_\sigma \oint x^\rho\, dx^\nu. \quad (6.3.7)$$

Наше заключение состоит в том, что произвольный вектор S_μ не будет изменяться, если его переносить параллельно самому себе вдоль произвольной малой замкнутой кривой в окрестности точки X, в том и только в том случае, если $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ исчезает в точке X. Мы уже отмечали, что изменение S_μ при параллельном переносе вдоль конечной замкнутой кривой C может быть вычислено путем разбиения на малые ячейки площади A, ограниченной C, и затем сложения изменений S_μ, которые возникают при параллельных переносах по контурам этих ячеек. Следовательно, если $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ исчезает вез е в A, то произвольный вектор S_μ не будет изменяться при параллельном переносе вдоль C.

Теперь предположим, что $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ действительно исчезает. Рассмотрим замкнутую кривую, состоящую из двух сегментов A и B, охватывающих точки x^μ и X^μ. Изменение вектора S_μ при параллельном переносе из x в X вдоль A должно компенсироваться изменением S_μ при параллельном переносе вдоль B из X в x, т. е.

$$\Delta^A_{X\to x} S_\mu + \Delta^B_{x\to X} S_\mu = 0.$$

Но изменение S_μ при параллельном переносе из x в X вдоль B равно изменению с обратным знаком, происходящему при параллельном переносе из X в x вдоль B:

$$\Delta^B_{x\to X} S_\mu = -\Delta^B_{X\to x} S_\mu,$$

и, следовательно,

$$\Delta^A_{X\to x} S_\mu = \Delta^B_{X\to x} S_\mu. \quad (6.3.8)$$

Таким образом, мы получим одно и то же значение S_μ при параллельном переносе из X в x независимо от того, по какой из кривых мы двигались. (Например, если два гироскопа находятся на различных пересекающихся орбитах около Земли и имеют одинаковую ориентацию, когда они встречаются в точке X^μ. то любое различие в их ориентациях, когда они встретятся потом в точке x^μ, будет мерой некоторой усредненной кривизны, создаваемой гравитационным полем Земли.)

Из этого следует, что задавая S_μ в X, мы можем определить с помощью параллельного переноса из X в x *поле* $S_\mu(x)$ во всей области пространства-времени, где $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ исчезает. Соотношение (6.3.8) гарантирует, что $S_\mu(x)$, определенное таким образом, будет зависеть только от x, но не от пути из X в x. Производная вдоль любой кривой $x(\tau)$ от этого поля равняется

$$\frac{dS_\mu}{d\tau}=\frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau},$$

а так как направление $dx^\nu(\tau)/d\tau$ произвольно, уравнение (6.3.1) принимает вид

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu}=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}S_\lambda \tag{6.3.9}$$

или

$$S_{\mu;\,\nu}=0. \tag{6.3.10}$$

Следовательно, если тензор кривизны исчезает, мы всегда можем построить решения уравнения (6.3.9) для любого заданного значения $S_\mu(X)$ путем параллельного переноса S_μ из X в x. И наоборот, если существует какое-либо ковариантное векторное поле с равными нулю ковариантными производными, то обязательно выполняется правило (6.3.1), а так как поле не может измениться при параллельном переносе вдоль любой замкнутой кривой, из (6.3.7) следует, что во всей области, где S_σ удовлетворяет (6.3.10), справедливо соотношение

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho}S_\sigma=0. \tag{6.3.11}$$

(К аналогичным выводам можно было бы прийти, используя вместо метода параллельного переноса известные положения теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [1]). При этом подходе соотношение (6.3.11) появилось бы как необходимое и достаточное условие того, что уравнение (6.3.9) может быть решено подстановкой степенных рядов по $x^\mu - X^\mu$.)

§ 4. Гравитация в криволинейных координатах

Предположим, что мы задались метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, который не является просто константой. Как узнать, заполнено ли действительно пространство гравитационным полем или $g_{\mu\nu}$ представляет собой лишь метрику $\eta_{\alpha\beta}$ специальной теории относительности, записанную в криволинейных координатах? Другими словами, можно ли говорить о том, что имеется набор координат Минковского $\xi^\alpha(x)$, которые удовлетворяют во всем пространстве