Из этого следует, что задавая S_μ в X, мы можем определить с помощью параллельного переноса из X в x *поле* $S_\mu(x)$ во всей области пространства-времени, где $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ исчезает. Соотношение (6.3.8) гарантирует, что $S_\mu(x)$, определенное таким образом, будет зависеть только от x, но не от пути из X в x. Производная вдоль любой кривой $x(\tau)$ от этого поля равняется

$$\frac{dS_\mu}{d\tau}=\frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau},$$

а так как направление $dx^\nu(\tau)/d\tau$ произвольно, уравнение (6.3.1) принимает вид

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu}=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}S_\lambda \tag{6.3.9}$$

или

$$S_{\mu;\,\nu}=0. \tag{6.3.10}$$

Следовательно, если тензор кривизны исчезает, мы всегда можем построить решения уравнения (6.3.9) для любого заданного значения $S_\mu(X)$ путем параллельного переноса S_μ из X в x. И наоборот, если существует какое-либо ковариантное векторное поле с равными нулю ковариантными производными, то обязательно выполняется правило (6.3.1), а так как поле не может измениться при параллельном переносе вдоль любой замкнутой кривой, из (6.3.7) следует, что во всей области, где S_σ удовлетворяет (6.3.10), справедливо соотношение

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho}S_\sigma=0. \tag{6.3.11}$$

(К аналогичным выводам можно было бы прийти, используя вместо метода параллельного переноса известные положения теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [1]). При этом подходе соотношение (6.3.11) появилось бы как необходимое и достаточное условие того, что уравнение (6.3.9) может быть решено подстановкой степенных рядов по $x^\mu - X^\mu$.)

§ 4. Гравитация в криволинейных координатах

Предположим, что мы задались метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, который не является просто константой. Как узнать, заполнено ли действительно пространство гравитационным полем или $g_{\mu\nu}$ представляет собой лишь метрику $\eta_{\alpha\beta}$ специальной теории относительности, записанную в криволинейных координатах? Другими словами, можно ли говорить о том, что имеется набор координат Минковского $\xi^\alpha(x)$, которые удовлетворяют во всем пространстве

условию

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}(x)}{\partial x^{\nu}} ? \tag{6.4.1}$$

Заметим, что принцип эквивалентности утверждает лишь то, что в каждой точке X можно найти локально-инерциальные координаты, которые удовлетворяют (6.4.1) в бесконечно малой окрестности X. Вопрос же, о котором идет речь, следующий: можно ли отыскать такой набор координат $\xi^{\alpha}(x)$, который удовлетворяет соотношению (6.4.1) во всем пространстве? Например, задавая метрические коэффициенты

$$g_{rr} = 1, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \qquad g_{tt} = -1, \tag{6.4.2}$$

мы знаем, что имеется набор ξ^{α}, удовлетворяющий (6.4.1), именно

$$\xi^1 = r \sin\theta \cos\varphi, \quad \xi^2 = r \sin\theta \sin\varphi, \quad \xi^3 = r\cos\theta, \quad \xi^4 = t. \tag{6.4.3}$$

Однако, как мы могли бы решить вопрос эквивалентно или нет (6.4.2) метрике Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, если бы не были настолько искушены, чтобы заметить, что это просто $\eta_{\alpha\beta}$, записанное в сферических координатах? Или, другими словами, если мы заменяем g_{rr} в (6.4.2) некой произвольной функцией r, то как нам убедиться в том, что мы действительно вводим гравитационное поле, т. е. как убедиться в том, что уравнение (6.4.1) не имеет в этом случае никаких решений?

Ответ дает следующая теорема: необходимыми и достаточными условиями эквивалентности метрики $g_{\mu\nu}(x)$ метрике Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ [т. е. условиями существования преобразования $x \to \xi$, удовлетворяющего (6.4.1)] являются, во-первых, равенство нулю во всем пространстве тензора кривизны, вычисленного с помощью $g_{\mu\nu}$, т. е.

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa} = 0, \tag{6.4.4}$$

и, во-вторых, условие, что в некоторой точке X матрица $g^{\mu\nu}(X)$ имеет три положительных и одно отрицательное собственное значение.

Необходимость этих двух условий очевидна. Предположим, что мы можем найти систему координат $\xi^{\alpha}(x)$, удовлетворяющую (6.4.1). В этой системе координат метрикой служит $\eta_{\alpha\beta}$, все компоненты аффинной связности исчезают и, следовательно, тензор Римана $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ равен нулю. Но равенство нулю тензора — инвариантное утверждение, так что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ должен исчезать и в первоначальной системе координат x^{μ}. В § 6 гл. 3 мы уже отмечали, что «конгруэнция», подобная (6.4.1), требует, чтобы $\eta_{\alpha\beta}$ и $g^{\mu\nu}$ имели одинаковое число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений во всем пространстве.

Чтобы доказать *достаточность* условия (6.4.4) для существования системы «везде инерциальных» координат $\xi^\alpha(x)$, удовлетворяющих (6.4.1), построим в явном виде $\xi^\alpha(x)$. Прежде всего заметим, что в любой точке X можно найти матрицу $d^\alpha{}_\mu$, для которой справедливо соотношение

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}(X)\, d^\alpha{}_\mu d^\beta{}_\nu. \tag{6.4.5}$$

Так как $g^{\mu\nu}(X)$ — симметричная матрица, можно найти ортогональную матрицу $O^\alpha{}_\mu$, для которой матрица OgO^T диагональна, т. е.

$$O^\alpha{}_\mu g^{\mu\nu} O^\beta{}_\nu = D^{\alpha\beta},$$

где

$$D^{\alpha\beta} = \begin{cases} D^\alpha, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

[Мы предполагаем, что три собственных значения D^α положительны, а одно отрицательно, и можно всегда располагать строки $O^\alpha{}_\mu$ так, чтобы в них стояли положительные D^1, D^2 и D^3 и отрицательное D^0. Тогда, чтобы удовлетворить (6.4.5), необходимо лишь выбрать $d^i{}_\mu = D^i{}_\mu/\sqrt{D^i}$ для $i = 1, 2, 3$ и $d^0{}_\mu = D^0{}_\mu/\sqrt{-D^0}$.] Далее мы определяем величины $D^\alpha{}_\mu(x)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial D^\alpha{}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} D^\alpha{}_\lambda \tag{6.4.6}$$

с начальными условиями

$$D^\alpha{}_\mu = d^\alpha{}_\mu \quad \text{при} \quad x = X. \tag{6.4.7}$$

В предыдущем параграфе мы показали, что такие уравнения всегда можно решить при том условии, что $R^\lambda{}_{\mu\nu\varkappa}$ исчезает. (Под величинами $D^\alpha{}_\mu$ подразумеваются четыре ковариантных вектора $D^0{}_\mu$, $D^1{}_\mu$, $D^2{}_\mu$ и $D^3{}_\mu$, а не единый тензор.) Так как $\partial D^\alpha{}_\mu/\partial x^\nu$ симметрично по μ и ν, мы можем записать векторы $D^\alpha{}_\mu$ как градиенты скаляров, в качестве которых мы берем локально-инерциальные координаты $\xi^\alpha(x)$:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = D^\alpha{}_\mu, \tag{6.4.8}$$

причем начальные значения $\xi^\alpha(X)$ — это некоторые произвольные постоянные. Чтобы убедиться в том, что эти координаты ξ действительно удовлетворяют (6.4.1), заметим прежде всего, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(g^{\mu\nu} D^\alpha{}_\mu D^\beta{}_\nu\right) = 0. \tag{6.4.9}$$

Это можно проверить путем прямого вычисления или еще проще, заметив, что (6.4.6) говорит как раз о том, что $D^{\alpha}{}_{\mu;\rho}$ исчезает, а также исчезает $g^{\mu\nu}{}_{;\rho}$, следовательно, равно нулю и $(g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu})_{;\rho}$. Но, поскольку $g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu}$ есть скаляр, сказанное означает, что исчезает и обычная производная этой величины. Но (6.4.7) и (6.4.5) показывают, что $g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu}$ равно $\eta^{\alpha\beta}$ при $x=X$, а поскольку эта величина является константой, то во всем пространстве установлено

$$\eta^{\alpha\beta}=g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu} \text{ (для всех } x). \tag{6.4.10}$$

Из (6.4.8) и (6.4.10) немедленно следует уравнение (6.4.1).

§ 5. Коммутации ковариантных дифференцирований

Существует другой путь, позволяющий убедиться в том, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ указывает на наличие или на отсутствие реального гравитационного поля. Рассмотрим вторую ковариантную производную от ковариантного вектора V_{λ}:

$$V_{\mu;\nu;\varkappa}=\frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}}V_{\mu;\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\varkappa}V_{\mu;\lambda}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}V_{\lambda;\nu}=\frac{\partial^2 V_{\mu}}{\partial x^{\nu}\,dx^{\varkappa}}-$$
$$-\frac{\partial V_{\lambda}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-V_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\varkappa}\frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\varkappa}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}V_{\sigma}-$$
$$-\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}\frac{dV_{\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}V_{\sigma}.$$

Члены, содержащие первые и вторые производные от V_{μ}, симметричны по ν и $\varkappa$, но члены, включающие само V_{μ}, имеют антисимметричную часть:

$$V_{\mu;\nu;\varkappa}-V_{\mu;\varkappa;\nu}=-V_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\varkappa}. \tag{6.5.1}$$

Точно так же можно показать, что

$$V^{\lambda}{}_{;\nu;\varkappa}-V^{\lambda}{}_{;\varkappa;\nu}=V^{\sigma}R^{\lambda}_{\sigma\nu\varkappa}. \tag{6.5.2}$$

Подобные формулы справедливы для любого тензора, например,

$$T^{\lambda}{}_{\mu;\nu;\varkappa}-T^{\lambda}{}_{\mu;\varkappa;\nu}=T^{\sigma}{}_{\mu}R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\varkappa}-T^{\lambda}{}_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\varkappa}. \tag{6.5.3}$$

Таким образом, если тензор кривизны равен нулю, то ковариантные производные *коммутируют*, чего и следовало ожидать во всех системах координат, из которых можно перейти в систему координат Минковского.