Это можно проверить путем прямого вычисления или еще проще, заметив, что (6.4.6) говорит как раз о том, что $D^{\alpha}{}_{\mu;\rho}$ исчезает, а также исчезает $g^{\mu\nu}{}_{;\rho}$, следовательно, равно нулю и $(g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu})_{;\rho}$. Но, поскольку $g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu}$ есть скаляр, сказанное означает, что исчезает и обычная производная этой величины. Но (6.4.7) и (6.4.5) показывают, что $g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu}$ равно $\eta^{\alpha\beta}$ при $x=X$, а поскольку эта величина является константой, то во всем пространстве установлено

$$\eta^{\alpha\beta}=g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu} \text{ (для всех } x). \tag{6.4.10}$$

Из (6.4.8) и (6.4.10) немедленно следует уравнение (6.4.1).

§ 5. Коммутации ковариантных дифференцирований

Существует другой путь, позволяющий убедиться в том, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ указывает на наличие или на отсутствие реального гравитационного поля. Рассмотрим вторую ковариантную производную от ковариантного вектора V_{λ}:

$$V_{\mu;\nu;\varkappa}=\frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}}V_{\mu;\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\varkappa}V_{\mu;\lambda}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}V_{\lambda;\nu}=\frac{\partial^2 V_{\mu}}{\partial x^{\nu}\,dx^{\varkappa}}-$$
$$-\frac{\partial V_{\lambda}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-V_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\varkappa}\frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\varkappa}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}V_{\sigma}-$$
$$-\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}\frac{dV_{\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}V_{\sigma}.$$

Члены, содержащие первые и вторые производные от V_{μ}, симметричны по ν и $\varkappa$, но члены, включающие само V_{μ}, имеют антисимметричную часть:

$$V_{\mu;\nu;\varkappa}-V_{\mu;\varkappa;\nu}=-V_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\varkappa}. \tag{6.5.1}$$

Точно так же можно показать, что

$$V^{\lambda}{}_{;\nu;\varkappa}-V^{\lambda}{}_{;\varkappa;\nu}=V^{\sigma}R^{\lambda}_{\sigma\nu\varkappa}. \tag{6.5.2}$$

Подобные формулы справедливы для любого тензора, например,

$$T^{\lambda}{}_{\mu;\nu;\varkappa}-T^{\lambda}{}_{\mu;\varkappa;\nu}=T^{\sigma}{}_{\mu}R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\varkappa}-T^{\lambda}{}_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\varkappa}. \tag{6.5.3}$$

Таким образом, если тензор кривизны равен нулю, то ковариантные производные *коммутируют*, чего и следовало ожидать во всех системах координат, из которых можно перейти в систему координат Минковского.