Свойство симметрии а) показывает, что тензор Риччи симметричен

$$R_{\mu\varkappa}=R_{\varkappa\mu}, \tag{6.6.7}$$

а свойство антисимметрии б) утверждает, что $R_{\mu\varkappa}$, по существу, единственный тензор второго ранга, который может быть образован из $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, поскольку, умножая (6.6.4) на $g^{\lambda\nu}$, $g^{\lambda\mu}$ и $g^{\nu\varkappa}$, получаем

$$R_{\mu\varkappa}=-g^{\lambda\nu}R_{\mu\lambda\nu\varkappa}=-g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\varkappa\nu}=+g^{\lambda\nu}R_{\mu\lambda\varkappa\nu},$$
$$g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu\nu\varkappa}=g^{\nu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa}=0.$$

Из свойства антисимметрии б) видим, что существует только один способ свертывания $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ для построения скаляра:

$$R\equiv g^{\lambda\nu}g^{\mu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa}=-g^{\lambda\nu}g^{\mu\varkappa}R_{\mu\lambda\nu\varkappa},$$
$$0=g^{\lambda\mu}g^{\nu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa}.$$

Свойство в) исключает другой скаляр, который можно было бы образовать в четырехмерном пространстве:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa}=0.$$

§ 7. Кривизна в N-мерном пространстве *

Рассмотрим здесь общий случай, когда пространство имеет N измерений. Чтобы подсчитать число алгебраически независимых компонент $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, удобно принять *обозначения Петрова* [2], и считать $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ матрицей $R_{(\lambda\mu)\,(\nu\varkappa)}$ с «индексами» $(\lambda\mu)$ и $(\nu\varkappa)$. Исходя из свойства (6.6.4), отмечаем, что число независимых значений каждого «индекса» равно числу независимых элементов антисимметричной матрицы в N-мерном пространстве, т. е. $^1/_2N(N-1)$. Из условия (6.6.3) следует, что $R_{(\lambda\mu)\,(\nu\varkappa)}$ симметрична по этим «индексам», поэтому (6.6.3) и (6.6.4) сокращают число независимых компонент в $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ до числа независимых элементов симметричной матрицы в $^1/_2N(N-1)$-мерном пространстве, а это число равно

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}N(N-1)\right]\left[\frac{1}{2}N(N-1)+1\right]=\frac{1}{8}N(N-1)(N^2-N+2).$$

Далее свойства (6.6.3) и (6.6.4) делают также полностью антисимметричной циклическую сумму $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}+R_{\lambda\varkappa\mu\nu}+R_{\lambda\nu\varkappa\mu}$, так что условие (6.6.5) накладывает еще $N(N-1)(N-2)(N-3)/4!$ дополнительных связей, оставляющих в $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ следующее число

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

независимых компонент:

$$C_N = \frac{1}{8} N (N-1)(N^2-N+2) - \frac{1}{24} N (N-1)(N-2)(N-3),$$

или, после приведения подобных членов,

$$C_N = \frac{1}{12} N^2 (N^2-1). \tag{6.7.1}$$

В одномерном пространстве тензор кривизны R_{1111} всегда равен нулю, что видно из условий (6.6.4) или (6.6.5) или из формулы (6.7.1), определяющей $C_1 = 0$ независимых компонент. Читатель вправе удивиться тому, что кривая линия имеет нулевую кривизну. Однако это лишний раз подчеркивает тот факт, что $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ отражает только внутренние свойства пространства, а не то, как оно вкладывается в пространство более высокой размерности. Действительно, мы отмечали, что правило преобразования метрического тензора в одномерном пространстве имеет вид

$$g'_{11} = \left(\frac{dx}{dx'}\right)^2 g_{11},$$

так что g'_{11} можно сделать в нем равным ± 1 повсюду, выбрав

$$x' = \int dx \sqrt{\pm g_{11}}.$$

В двумерном пространстве условие (6.7.1) оставляет в $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ только одну независимую компоненту, которой можно считать R_{1212}; другие компоненты связаны с R_{1212} соотношением (6.6.4):

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121},$$
$$R_{1111} = R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0.$$

Эти формулы можно записать в более компактной форме:

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = (g_{\lambda\nu} g_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa} g_{\mu\nu}) \frac{R_{1212}}{g}$$

где g — детерминант, равный $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Свертка λ и ν дает тензор Риччи

$$R_{\mu\varkappa} = g_{\mu\varkappa} \frac{R_{1212}}{g}, \tag{6.7.2}$$

а свертка μ и $\varkappa$ приводит к скалярной кривизне

$$R = \frac{2R_{1212}}{g}. \tag{6.7.3}$$

Таким образом, тензор кривизны равен

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = \frac{1}{2} R (g_{\lambda\nu} g_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa} g_{\mu\nu}). \tag{6.7.4}$$

Гауссова кривизна K, введенная в § 1, гл. 1, связана с R следующим образом:

$$K \equiv -\frac{R}{2} = -\frac{R_{1212}}{g}. \qquad (6.7.5)$$

(Коэффициент $-1/2$ имеет чисто историческое происхождение.) Выражение (1.1.12) следует из (6.6.2) и (6.7.5).

В трехмерном пространстве формула (6.7.1) говорит о том, что тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Это также число независимых компонент тензора Риччи $R_{\mu\varkappa}$ в трехмерном пространстве, а потому можно предвидеть, что $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ в этом случае выражается только через $R_{\mu\varkappa}$. Используя свойства ковариантности, симметрии и свертывания $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, можем угадать, что это соотношение имеет вид

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\varkappa} + g_{\mu\varkappa}R_{\lambda\nu} - \\ - \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\nu}g_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa}g_{\mu\nu}\right) R. \qquad (6.7.6)$$

Чтобы доказать (6.7.6), выберем систему координат, в которой $g_{\mu\nu}$ исчезает при μ, неравном ν, в некоторой точке X. (Этого можно достигнуть, выбрав $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ в точке X в виде ортогональной матрицы, которая диагонализирует $g_{\mu\nu}$ в X.) В этой системе в точке X имеем

$$R_{12} = g^{33}R_{1323},$$

так что в соответствии с (6.7.6) выполняется соотношение

$$R_{1323} = g_{33}R_{12}.$$

Кроме того, имеем

$$R_{11} = g^{22}R_{1212} + g^{33}R_{1313},$$
$$R_{22} = g^{33}R_{2323} + g^{11}R_{2121},$$

откуда, опять-таки в соответствии с (6.7.6), получаем

$$g_{22}R_{11} + g_{11}R_{22} = 2R_{1212} + g^{23}\left(g_{22}R_{1313} + g_{11}R_{2323}\right) = \\ = R_{1212} + g_{11}g_{22}\left(g^{11}g^{22}R_{1212} + g^{11}g^{33}R_{1313} + g^{22}g^{33}R_{2323}\right)$$

или

$$R_{1212} = g_{22}R_{11} + g_{11}R_{22} - \frac{1}{2}g_{11}g_{22}R.$$

Остальные независимые компоненты, $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, R_{1223}, R_{1213}, R_{2323} и R_{3131}, могут быть получены из R_{1323} и R_{1212} перестановкой индексов 1, 2, 3. Таким образом, (6.7.6) справедливо и для этих компонент. Так как выражение (6.7.6) найдено в системе координат, которые ортогональны в точке X, и является явно ковариантным выражением, оно справедливо в общем случае.

Полный тензор Римана — Кристоффеля необходим для описания кривизны пространства только в том случае, когда число измерений пространства равно четырем и выше. Например, в четырехмерном пространстве [см. (6.7.1)] приходим к тензору кривизны с числом независимых компонент, равным двадцати, а $R_{\mu\varkappa}$ имеет только 10 независимых компонент, так что $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ имеет 10 компонент, помимо тех, что выражаются через $R_{\mu\varkappa}$.

В общем случае кривизну N-мерного пространства описывает тензор $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ своими $^1/_{12}N^2\,(N^2-1)$-компонентами, однако описывает неинвариантным образом, так как значения этих компонент зависят не только от внутренних свойств пространства, но и от конкретного выбора системы координат. Инвариантные характеристики кривого пространства — это *скаляры*, которые надо построить из $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и $g_{\mu\nu}$. Подсчитаем число таких скаляров. Всего мы можем задать в данной точке X при произвольном преобразовании координат $x\to x'$ N^2 величин $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$. Следовательно, на $^1/_{12}N^2\,(N^2-1)$ независимых компонент $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и $^1/_2N\,(N+1)$ независимых компонент $g_{\mu\nu}$ в этой точке могут быть наложены с помощью произвольных преобразований координат N^2 алгебраических условий. Поэтому число независимых скаляров, которые можно построить из $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и $g_{\mu\nu}$, равняется

$$\frac{1}{12}N^2\,(N^2-1)+\frac{1}{2}N\,(N+1)-N^2=\frac{1}{12}N\,(N-1)\,(N-2)\,(N+3). \tag{6.7.7}$$

Случай $N=2$ — исключение из этого правила, поскольку в двумерном пространстве существует однопараметрическая подгруппа преобразований координат, которая не затрагивает $g_{\mu\nu}$ и $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$. Истинное число инвариантов в этом случае не нуль, а единица, что соответствует самому скаляру кривизны. Подобного эффекта нет для пространств более высоких размерностей, так что для $N\geqslant 3$ правило (6.7.7) справедливо. В случае $N=3$ из (6.7.7) следует, что имеются *три* скалярные кривизны, которые удобно выбрать в виде трех корней секулярного уравнения

$$\operatorname{Det}\,(R_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu})=0$$

или, эквивалентно, в виде трех величин

$$R,\qquad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu},\qquad \frac{\operatorname{Det}R}{\operatorname{Det}g}.$$

Для $N=4$ выражение (6.7.7) приводит к *четырнадцати* скалярам кривизны. Чтобы перечислить их, а также для других целей, удобно разложить $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ таким образом, чтобы он зависел только от тензора Риччи и величины $C_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, которая не имеет никаких нетривиальных сверток. В пространствах $N\geqslant 3$ измерений такое разложение выглядит следующим образом:

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa} \equiv \frac{1}{N-2}\left(g_{\lambda\nu}R_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\varkappa} + g_{\mu\varkappa}R_{\lambda\nu}\right) - \\ - \frac{R}{(N-1)(N-2)}\left(g_{\lambda\nu}g_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa}g_{\mu\nu}\right) + C_{\lambda\mu\nu\varkappa}.$$

Тензор $C_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ называется *тензором Вейля* [3] или *конформным тензором*. (Последнее название дано потому, что необходимым и достаточным условием существования координатной системы, в которой $g_{\mu\nu}$ пропорционально постоянной матрице во всем пространстве, является равенство нулю тензора $C_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ во всем этом пространстве, см., например, [4].) Этот тензор имеет те же самые алгебраические свойства, что и $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, и, кроме того, удовлетворяет $^1/_2 N(N+1)$ условиям

$$C^{\lambda}{}_{\mu\lambda\varkappa} = 0,$$

так что число его линейно-независимых компонент равно

$$\frac{1}{12}N^2(N^2-1) - \frac{1}{2}N(N+1) = \frac{1}{12}N(N+1)(N+2)(N-3).$$

(Из выражения (6.7.6) сразу следует, что для $N = 3$ имеем $C_{\lambda\mu\nu\varkappa} = 0$.) Исключая вырожденные случаи, все инварианты кривизны могут быть составлены только из компонент тензора Вейля (при том единственном выборе системы координат, при котором $R_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ диагональны, причем элементами $g_{\mu\nu}$ являются $+1$, -1 и 0) и собственных значений $R_{\mu\nu}$. Однако этот подсчет неправилен, если некоторые собственные значения $R_{\mu\nu}$ вырождены. Особенно интересный случай возникает, когда $R_{\mu\nu}$ равен нулю, что, как мы увидим в следующей главе, соответствует наличию физических гравитационных полей в пустом пространстве. В этом случае инварианты кривизны для $N = 4$ суть 10 нулевых компонент $R_{\mu\nu}$ (равенство нулю тензора — инвариантное утверждение) и четыре величины

$$C^{\lambda\mu\nu\varkappa}C_{\lambda\mu\nu\varkappa}, \qquad \frac{\varepsilon^{\lambda\mu}{}_{\rho\sigma}C^{\rho\sigma\nu\varkappa}C_{\lambda\mu\nu\varkappa}}{\sqrt{g}}.$$

$$C_{\lambda\mu\nu\varkappa}C^{\nu\varkappa\rho\sigma}C_{\rho\sigma}{}^{\lambda\mu}, \qquad \frac{C_{\lambda\mu\nu\varkappa}C^{\nu\varkappa\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\tau\xi}C_{\tau\xi}{}^{\lambda\mu}}{\sqrt{g}}.$$

Петров [2] дал эквивалентное описание четырех неисчезающих инвариантов кривизны как корней секулярного уравнения и классифицировал различные алгебраические типы тензора Вейля в соответствии с вырожденностью этих корней. В заключение подчеркнем, что (6.7.7) дает число *алгебраически* независимых инвариантов кривизны. Среди этих инвариантов, вообще говоря, имеются дифференциальные связи, так что число функционально независимых инвариантов кривизны меньше, чем определяемое по формуле (6.7.7).