§ 8. Тождества Бианки

Тензор кривизны удовлетворяет важным дифференциальным тождествам в дополнение к алгебраическим тождествам, приведенным в § 6. Легче всего эти тождества получить, вводя в рассматриваемой точке локально-инерциальную систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ (но не ее производные) равны нулю в этой точке. Тогда в точке x выражение (6.6.1) дает

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa;\,\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\eta}}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\mu}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial^2 g_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}+\frac{\partial^2 g_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}}\right).$$

Все другие члены — по крайней мере первого порядка по Г. Путем циклической перестановки ν, $\varkappa$ и η получаем *тождества Бианки:*

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa;\,\eta}+R_{\lambda\mu\eta\nu;\,\varkappa}+R_{\lambda\mu\varkappa\eta;\,\nu}=0. \tag{6.8.1}$$

Эти тождества явно ковариантны, так что если они найдены в какой-либо инерциальной системе, то тем самым они найдены и в общем случае. (Их можно, конечно, проверить также с помощью прямых вычислений.)

Особенно полезна нам будет свернутая форма (6.8.1). С учетом того, что ковариантные производные от $g^{\lambda\nu}$ исчезают, свертывая λ и ν, находим

$$R_{\mu\varkappa;\,\eta}-R_{\mu\eta;\,\varkappa}+R^{\nu}{}_{\mu\varkappa\eta;\,\nu}=0. \tag{6.8.2}$$

Свертывая это соотношение еще раз, получаем

$$R_{;\,\eta}-R^{\mu}{}_{\eta;\,\mu}-R^{\nu}{}_{\eta;\,\nu}=0,$$

или

$$\left(R^{\mu}{}_{\eta}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\eta}R\right)_{;\,\mu}=0. \tag{6.8.3}$$

Эквивалентная, но более известная формула имеет вид

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\,\mu}=0. \tag{6.8.4}$$

§ 9. Геометрическая аналогия *

Ранее в этой главе мы видели, что неравенство нулю тензора $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ отражает существование гравитационного поля. В гл. 1 мы также указывали, что Гауссу пришлось ввести «гауссову кривизну» $K=-R/2$ как меру отклонения двумерной геометрии от евклидовой, а Риман впоследствии ввел тензор кривизны $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, чтобы обобщить понятие кривизны на случай пространств

*) Этот и следующий параграфы лежат несколько в стороне от основной линии книги и могут быть опущены при первом чтении.

большего числа измерений. Таким образом, нет ничего удивительного, что Эйнштейн и его последователи рассматривали эффекты гравитационного поля как следствие изменений геометрии пространства и времени. Одно время казалась обоснованной надежда найти геометрическую формулировку всей остальной физики, но эта надежда не оправдалась, а геометрическая интерпретация теории гравитации свелась просто к аналогии, оставившей нам такие термины, как «метрика», «аффинная связность», «кривизна», и не очень полезна в других отношениях. Важно, что мы можем делать предсказания относительно изображений на астрономических снимках, о частотах спектральных линий и т. д., и, в конце концов, не так уж важно, приписываем ли мы эти предсказания физическим воздействиям гравитационных полей на движение планет и фотонов или искривлению пространства и времени. (Читателя следует предупредить о том, что такие взгляды не являются ортодоксальными и встречают возражения со стороны многих специалистов по теории относительности.)

Все же, игнорируя предыдущее замечание, полезно привести без доказательства выражение, показывающее, как тензор $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ связан с кривизной риманова пространства. Рассматривая точку X в пространстве произвольного числа измерений и задавая в ней два вектора a^μ и b^μ, можно построить семейство «геодезических кривых» $x^\mu = x^\mu(\tau, \alpha, \beta)$, проходящих через эту точку; уравнения оказываются следующими:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0,$$

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)_{x=X} = \alpha a^\mu + \beta b^\mu.$$

Числа α и β здесь могут принимать все действительные значения. Эти кривые заполнят двумерную поверхность $S(a, b)$, содержащую точку X, и гауссова кривизна этой поверхности в точке X будет равна (см. [4], разд. 28)

$$K(a, b) = \frac{R_{\lambda\mu\nu\varkappa}a^\lambda b^\mu a^\nu b^\varkappa}{(g_{\lambda\varkappa}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\varkappa})\, a^\lambda b^\mu a^\nu b^\varkappa}. \tag{6.9.1}$$

Из соотношения (6.7.4) следует, что в двух измерениях $K(a, b)$ не зависит от a и b и равно как раз $-R/2$.

§ 10. Геодезическая девиация*

Введение тензора кривизны мотивировалось необходимостью найти подходящие уравнения поля тяготения. Однако тензор кривизны полезен также для описания воздействия гравитации на физические системы.