большего числа измерений. Таким образом, нет ничего удивительного, что Эйнштейн и его последователи рассматривали эффекты гравитационного поля как следствие изменений геометрии пространства и времени. Одно время казалась обоснованной надежда найти геометрическую формулировку всей остальной физики, но эта надежда не оправдалась, а геометрическая интерпретация теории гравитации свелась просто к аналогии, оставившей нам такие термины, как «метрика», «аффинная связность», «кривизна», и не очень полезна в других отношениях. Важно, что мы можем делать предсказания относительно изображений на астрономических снимках, о частотах спектральных линий и т. д., и, в конце концов, не так уж важно, приписываем ли мы эти предсказания физическим воздействиям гравитационных полей на движение планет и фотонов или искривлению пространства и времени. (Читателя следует предупредить о том, что такие взгляды не являются ортодоксальными и встречают возражения со стороны многих специалистов по теории относительности.)

Все же, игнорируя предыдущее замечание, полезно привести без доказательства выражение, показывающее, как тензор $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ связан с кривизной риманова пространства. Рассматривая точку X в пространстве произвольного числа измерений и задавая в ней два вектора a^μ и b^μ, можно построить семейство «геодезических кривых» $x^\mu = x^\mu(\tau, \alpha, \beta)$, проходящих через эту точку; уравнения оказываются следующими:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0,$$

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)_{x=X} = \alpha a^\mu + \beta b^\mu.$$

Числа α и β здесь могут принимать все действительные значения. Эти кривые заполнят двумерную поверхность $S(a, b)$, содержащую точку X, и гауссова кривизна этой поверхности в точке X будет равна (см. [4], разд. 28)

$$K(a, b) = \frac{R_{\lambda\mu\nu\varkappa}a^\lambda b^\mu a^\nu b^\varkappa}{(g_{\lambda\varkappa}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\varkappa})\, a^\lambda b^\mu a^\nu b^\varkappa}. \qquad (6.9.1)$$

Из соотношения (6.7.4) следует, что в двух измерениях $K(a, b)$ не зависит от a и b и равно как раз $-R/2$.

§ 10. Геодезическая девиация*

Введение тензора кривизны мотивировалось необходимостью найти подходящие уравнения поля тяготения. Однако тензор кривизны полезен также для описания воздействия гравитации на физические системы.

Рассмотрим, например, две падающие рядом частицы с траекториями $x^\mu(\tau)$ и $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$. Уравнения движения для них имеют вид

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau},$$

$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2}[x^\mu + \delta x^\mu] + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x + \delta x) \frac{d}{d\tau}[x^\nu + \delta x^\nu] \frac{d}{d\tau}[x^\lambda + \delta x^\lambda].$$

Если вычесть одно уравнение из другого и оставить только члены первого порядка по δx^μ, получим

$$0 = \frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\delta x^\lambda}{d\tau}$$

или, выразив это через ковариантные производные вдоль кривой $x^\mu(\tau)$ (см. § 9 гл. 4), придадим этому уравнению вид

$$\frac{D^2}{D\tau^2} \delta x^\lambda = R^\lambda{}_{\nu\mu\rho} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \tag{6.10.1}$$

Оказывается, что, хотя свободно падающая частица находится в состоянии покоя в системе координат, падающей вместе с частицами, две свободно падающие рядом частицы будут находиться в относительном движении, обнаруживающем наличие гравитационного поля с точки зрения наблюдателя, падающего вместе с ними. Это, конечно, не является нарушением принципа эквивалентности, поскольку эффект, связанный с правой частью уравнения (6.10.1), становится настолько малым, что им можно пренебречь, когда удаление частиц много меньше, чем характерные размеры поля.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Риманова геометрия, ИЛ, 1948).

Schouten J. A., Ricci-Calculus, Springer-Verlag, 1954 (см. перевод: *Схоутен Я. А.*, Тензорный анализ для физиков, «Наука», 1965).

См. также библиографию к гл. 3.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Eisenhart L. P.*, Continuous Groups of Transformations, Dover Publications, 1961, p. 1 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947).
2. *Петров А. З.*, Учен. зап. Казанск. Гос. унив., **114**, № 8, 55 (1954); Пространства Эйнштейна, Физматгиз, 1961.
3. *Weyl H.*, Mat. Zs., **2**, 384 (1918).
4. *Eisenhart L. P.*, Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926, Sec. 28 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Риманова геометрия, ИЛ, 1948).