> В общую теорию относительности Вы поверите, когда изучите ее. Поэтому я ни единым словом не буду ее защищать перед Вами.
>
> *А. Эйнштейн, из письма к А. Зоммерфельду, 8 февраля 1916 г.*

Глава 7
УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА

Главы с 3 по 5 содержали изложение первой половины теории гравитации: математическое описание гравитационных полей, которое определяет их воздействие на произвольные физические системы. В этой главе мы начнем изложение второй ее половины, а именно дифференциальных уравнений для самого гравитационного поля.

§ 1. Получение уравнений поля

Уравнения поля тяготения неизбежно более сложны, чем уравнения электродинамики. Уравнения Максвелла линейны, поскольку само электромагнитное поле не переносит заряд, в то время как гравитационное поле переносит энергию и импульс (см. § 3 гл. 5) и должно, следовательно, давать вклад в свой собственный источник. Поэтому уравнения гравитационного поля должны быть нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых нелинейность отражает воздействие гравитации самой на себя.

Разбирая эти нелинейные эффекты, мы снова будем руководствоваться принципом эквивалентности. В любой точке X в произвольно сильном гравитационном поле мы можем задать локально-инерциальную систему координат, такую, что

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta}, \tag{7.1.1}$$

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right)_{x=X} = 0. \tag{7.1.2}$$

Следовательно, в точке x, находящейся вблизи X. метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ может отличаться от $\eta_{\alpha\beta}$ только членами, квадратичными по $x - X$. В этой системе координат гравитационное поле является слабым вблизи точки X, и мы можем думать, что поле описывается *линейными* дифференциальными уравнениями в частных производных. Если же мы знаем эти уравнения для слабых полей, мы можем найти уравнения поля в общем случае преобразованием координат, обратным тому, которое делает это поле слабым. К сожалению, из опыта мы очень мало знаем об уравнениях слабых полей. Причину этого не надо искать очень глубоко; просто гравитационное излучение так слабо испускается и поглощается веществом, что оно до сих пор не было зарегистрировано. Но, найдя оправдание для нашей необразованности, мы все же не сможем следовать прямым путем, как в предыдущих главах. а должны в какой-то мере пытаться угадать ответ.

Прежде всего напомним, что в случае слабого статического поля, создаваемого нерелятивистским телом с плотностью массы ρ, 00-компонента метрического тензора приближенно равна

$$g_{00} \approx -(1+2\phi).$$

[См. выражение (3.4.5).] Здесь ϕ — ньютоновский потенциал, задаваемый уравнением Пуассона

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho,$$

где G — постоянная Ньютона, равная $6{,}670 \cdot 10^{-8}$ в единицах СГС. Плотность энергии T_{00} для движущегося с нерелятивистской скоростью вещества приближенно равна плотности его массы:

$$T_{00} \approx \rho.$$

Объединяя эти соотношения, получаем

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \tag{7.1.3}$$

Это уравнение *по предположению* справедливо только для слабых статических полей, создаваемых нерелятивистским веществом, и в том виде, в каком оно записано, оно даже не лоренц-инвариантно. Однако (7.1.3) приводит нас к предположению о том, что уравнения слабых полей для распределения энергии и импульса $T_{\alpha\beta}$ общего вида имеют форму

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}, \tag{7.1.4}$$

где $G_{\alpha\beta}$ есть линейная комбинация метрики и ее первых и вторых производных. Тогда из принципа эквивалентности следует, что уравнения, которым подчиняются гравитационные поля произвольной напряженности, должны иметь вид

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{7.1.5}$$

где $G_{\mu\nu}$ — это тензор, сводящийся к $G_{\alpha\beta}$ в случае слабых полей.

Вообще говоря, из метрического тензора и его производных можно образовать много тензоров $G_{\mu\nu}$, которые сводятся к заданному $G_{\alpha\beta}$ в пределе слабых полей. Представим себе, что $G_{\mu\nu}$ может разлагаться в сумму произведений производных от метрики, и классифицируем слагаемые по полному числу N производных от компонент метрики. (Например, слагаемое с $N = 3$ может быть линейным по третьим производным от метрики, или по произведению первой производной на вторую производную, или по произведению первых трех производных.)

В целом $G_{\mu\nu}$ должен иметь размерность второй производной, так что каждое слагаемое с $N \neq 2$ оказывается умноженным на постоянную, имеющую размерность длины в степени $N - 2$. Такие члены будут пренебрежимо малы для гравитационных полей достаточно больших или малых пространственно-временных масштабов, если $N > 2$ или $N < 2$ соответственно. Для того чтобы избавиться от неоднозначности в выборе $G_{\mu\nu}$, предположим, что уравнения гравитационного поля *масштабно-однородны*, т. е. допустимы только члены с $N = 2$.

Рассмотрим левую часть уравнения поля (7.1.5). Мы знаем о ней, что

а) по определению $G_{\mu\nu}$ является тензором;

б) по предположению $G_{\mu\nu}$ состоит только из членов с $N = 2$, где N — полное число производных от компонент метрики, т. е. $G_{\mu\nu}$ содержит только члены, линейные по второй производной или квадратичные по первым производным от метрики;

в) поскольку $T_{\mu\nu}$ симметричен, то симметричен и тензор $G_{\mu\nu}$;

г) поскольку $T_{\mu\nu}$ сохраняется (в смысле ковариантного дифференцирования), то сохраняется и $G_{\mu\nu}$:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} = 0; \tag{7.1.6}$$

д) в случае слабого стационарного поля, создаваемого нерелятивистски движущимся веществом, 00-компонента (7.1.5) должна сводиться к (7.1.3); таким образом, в этом пределе имеем

$$G_{00} \approx \nabla^2 g_{00}. \tag{7.1.7}$$

Этих условий как раз достаточно для нахождения $G_{\mu\nu}$.

В § 2 гл. 6 мы видели, что наиболее общий путь построения поля, удовлетворяющего условиям а) и б),— это свертывание тензора кривизны $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa}$. Свойство антисимметрии $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, обсужденное в § 6 гл. 6, показывает, что существуют только два тензора, которые можно образовать путем свертывания $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$; это тензор Риччи $R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\varkappa}$ и скалярная кривизна $R = R^{\mu}{}_{\mu}$. Следовательно, условия а) и б) требуют, чтобы $G_{\mu\nu}$ имел вид

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \tag{7.1.8}$$

где C_1 и C_2 — константы. Эта форма автоматически симметрична [см. свойство (6.6.7)], так что условие в) не дает нам ничего нового. Используя тождества Бианки (6.8.3), получаем ковариантную дивергенцию $G_{\mu\nu}$ в виде

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\,\nu},$$

а потому условие г) допускает две возможности: либо $C_2 = -C_1/2$, либо $R_{;\nu}$ равно нулю повсюду. Вторую возможность можно исключить, поскольку (7.1.8) и (7.1.5) приводят к соотношению

$$G^{\mu}{}_{\mu} = (C_1 + 4C_2)\, R = -8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}.$$

Поэтому, если $R_{;\nu} \equiv \partial R/\partial x^{\nu}$ равно нулю, то равно нулю и $\partial T^{\mu}_{\mu}/\partial x^{\nu}$, что явно не так в случае неоднородного нерелятивистского вещества. Тогда приходим к заключению, что $C_2 = -C_1/2$, и переписываем (7.1.8) следующим образом:

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \tag{7.1.9}$$

Используем, наконец, условие д), чтобы определить постоянную C_1. Для нерелятивистской системы всегда выполняется неравенство $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$, следовательно, мы рассматриваем здесь случай $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$ или, используя (7.1.9),

$$R_{ij} \approx \frac{1}{2} g_{ij} R.$$

Кроме того, мы имеем дело со слабыми полями, так что $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$. Поэтому скалярная кривизна определяется так:

$$R \approx R_{kk} - R_{00} \approx \frac{3}{2} R - R_{00},$$

или

$$R \approx 2R_{00}. \tag{7.1.10}$$

Подставляя (7.1.10) и (7.1.1) в (7.1.9), находим

$$G_{00} \approx 2C_1 R_{00}. \tag{7.1.11}$$

Чтобы вычислить R_{00} для слабого поля, можно использовать линейную часть $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, взяв ее из выражения (6.6.2):

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}\, \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}\, \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}\, \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}\, \partial x^{\lambda}} \right].$$

Если поле статическое, все временны́е производные исчезают и необходимые нам компоненты равны

$$R_{0000} \approx 0, \quad R_{i0j0} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\, \partial x^j}.$$

Следовательно, (7.1.11) можно переписать так:

$$G_{00} \approx 2C_1 (R_{i0i0} - R_{0000}) \approx C_1 \nabla^2 g_{00}.$$

Сравнивая это выражение с (7.1.7), находим, что условие д) выполняется тогда и только тогда, когда $C_1 = 1$.

Положив $C_1 = 1$ в (7.1.9), завершаем вычисление $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{7.1.12}$$

Привлекая теперь (7.1.5), получаем *уравнения поля Эйнштейна*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{7.1.13}$$

Иногда полезна альтернативная форма. Свертка (7.1.13) с $g^{\mu\nu}$ приводит к соотношению

$$R - 2R = -8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}$$

или

$$R = 8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}, \tag{7.1.14}$$

которое при подстановке в (7.1.13) дает

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda} \right). \tag{7.1.15}$$

Естественно, можно возвратиться от (7.1.15) к (7.1.14) и (7.1.13), так что (7.1.13) и (7.1.15) следует рассматривать как полностью эквивалентные формы уравнения поля Эйнштейна.

В вакууме $T_{\mu\nu}$ исчезает, а потому из (7.1.15) следует, что уравнения поля Эйнштейна в *пустом пространстве* — это просто

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{7.1.16}$$

В пространстве-времени двух или трех измерений это означало бы равенство нулю полного тензора кривизны $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и соответственно отсутствие гравитационного поля (см. § 4 гл. 6). Только при четырех и выше измерениях в пустом пространстве могут существовать истинные гравитационные поля.

Мы могли бы по нашему желанию ослабить условие б) и допустить в $G_{\mu\nu}$ члены, содержащие менее двух производных от метрики. Возможность использовать первые производные не вводит никаких новых членов в $G_{\mu\nu}$ (см. § 1 гл. 6), но если мы используем сам метрический тензор, то может появиться одно новое слагаемое, равное $g_{\mu\nu}$, умноженному на постоянную λ. Уравнения поля читались бы тогда так:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Член $\lambda g_{\mu\nu}$ был впервые написан Эйнштейном [1] для преодоления трудностей в космологии (которые потом исчезли); по этой причине λ называют *космологической постоянной.* Этот член удовлетворяет условиям а), в), г), но не удовлетворяет условию д), а потому, чтобы не портить ньютоновскую теорию тяготения, λ должно быть очень мало. Мы везде в этой книге, исключая гл. 16, будем считать, что $\lambda = 0$.