

## § 2. Другой вывод \*

При выводе уравнений Эйнштейна, приведенном в предыдущем параграфе, очень важным оказалось предположение о том, что левая сторона  $G_{\mu\nu}$  — тензор, зависящий лишь от метрики и ее первых и вторых производных. Можно было бы рассмотреть более общий тензор, который включал бы элементы, не связанные с метрическим тензором и его производными, такой, как

$$\left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi_X^\alpha(x)} \frac{\partial^3 \xi_X^\alpha(x)}{\partial x^\nu \partial x^\lambda \partial x^\rho} \right)_{x=X}, \quad (7.2.1)$$

где  $\xi_X^\alpha(x)$  — это координаты, локально-инерциальные в точке  $X$ . [Ссылки на точные определения (3.3.2) и (3.3.3) метрики и аффинной связности показывают, что (7.2.1) не связано с их производными.] Такой тензор можно было бы построить так:

$$G_{\mu\nu} \equiv \left( \frac{\partial \xi_X^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\beta(x)}{\partial x^\nu} G_{\alpha\beta}^X(x) \right)_{x=X}, \quad (7.2.2)$$

где  $G_{\alpha\beta}^X$  — наиболее общая возможная линейная комбинация вторых производных от метрического тензора в системе координат  $\xi_X$ , удовлетворяющей условиям лоренц-ковариантности и симметрии, т. е.

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} = a_1 \square^2 g_{\alpha\beta} + a_2 & \left( \frac{\partial^3 g^\gamma_\beta}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} + \frac{\partial^2 g^\gamma_\alpha}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma} \right) + \\ & + a_3 \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^\gamma_\delta}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} + b_1 \frac{\partial^2 g^\gamma_\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} + b_2 \eta_{\alpha\beta} \square^2 g^\gamma_\gamma, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

где  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  — пять произвольных безразмерных констант. [Мы опустили символ  $X$ . Здесь все индексы поднимаются и опускаются с помощью тензоров Минковского  $\eta^{\alpha\beta}$  и  $\eta_{\alpha\beta}$ , а  $\square^2$  есть даламбертиан  $\square^2 \equiv \eta^{\alpha\beta} (\partial/\partial \xi^\alpha) (\partial/\partial \xi^\beta)$ .] При совершенно произвольных значениях введенных выше пяти констант  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  тензор  $G_{\mu\nu}$  зависел бы от посторонних элементов, таких, как (7.2.1). Однако замечательно то, что, используя условие сохранения энергии-импульса и учитывая справедливость ньютоновской теории в пределе слабых стационарных полей, создаваемых нерелятивистским веществом, можно найти такие строгие ограничения на константы  $a_1, \dots, b_2$ , что члены, включающие (7.2.1), выпадают и мы получаем теорию Эйнштейна.

В случае слабых полей требование сохранения энергии-импульса приводит к обычному закону сохранения  $\partial T^\alpha_\beta / \partial \xi^\alpha = 0$ ,

\* Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

и, следовательно, предполагаемые уравнения поля  $G_{\alpha\beta} = -8\pi GT_{\alpha\beta}$  накладывают условие

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} G^\alpha_\beta = (a_1 + a_2) \square^2 \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} g^\alpha_\beta + \\ + (a_2 + a_3) \left( \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial^2 g^\gamma_\delta}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right) + (b_1 + b_2) \square^2 \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} g^\gamma_\gamma.$$

Поэтому  $a_1 + a_2$ ,  $a_2 + a_3$  и  $b_1 + b_2$  должны равняться нулю, что дает

$$G_{\alpha\beta} = a_1 \left\{ \square^2 g_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 g_\beta^\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\gamma} - \frac{\partial^2 g_\alpha^\gamma}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^\gamma_\delta}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right\} + \\ + b_1 \left\{ \frac{\partial^2 g^\gamma_\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} - \eta_{\alpha\beta} \square^2 g^\gamma_\gamma \right\}. \quad (7.2.4)$$

Чтобы определить  $a_1$  и  $b_1$ , перейдем к ньютоновскому пределу. Для статического поля (7.2.4) дает

$$G_{ii} + G_{00} = a_1 \nabla^2 (g_{ii} + g_{00}) - b_1 \nabla^2 (g_{ii} - g_{00}).$$

(По повторяющимся латинским индексам производится суммирование по значениям 1, 2, 3.) Для нерелятивистской системы, состоящей из вещества, тензор  $|T_{ij}|$  много меньше чем  $|T_{00}|$ , так что мы получаем уравнение поля в виде

$$(a_1 + b_1) \nabla^2 g_{00} + (a_1 - b_1) \nabla^2 g_{ii} = -8\pi G T_{00}. \quad (7.2.5)$$

Мы хотим, чтобы уравнения поля в этом пределе приводили к закону Ньютона:

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00},$$

но (7.2.5) — единственное из уравнений поля, включающее только  $g_{00}$  и/или  $g_{ii}$ , так что мы должны требовать, чтобы  $a_1 = b_1 = 1/2$ . Для слабых полей левая часть уравнения тогда имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \square^2 g_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 g_\beta^\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\gamma} - \frac{\partial^2 g_\alpha^\gamma}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma} + \frac{\partial^2 g^\gamma_\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial^2 g^\gamma_\delta}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} - \square^2 g^\gamma_\gamma \right\}. \quad (7.2.6)$$

Но выражение (6.6.2) показывает, что в случае слабого поля тензор Риччи

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \square^2 g_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 g_\beta^\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\gamma} - \frac{\partial^2 g_\alpha^\gamma}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma} + \frac{\partial^2 g^\gamma_\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \right\},$$

а потому (7.2.5) дает следующее уравнение поля:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R = -8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (7.2.7)$$

Тогда для произвольного поля принцип эквивалентности немедленно определяет уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (7.2.8)$$

поскольку (7.2.8) общековариантно и сводится к (7.2.6) в локально-инерциальных системах координат. Таким образом, если нам потребуется более общее уравнение, чем эйнштейновское, которое в пределе слабых полей сводится к уравнению второго порядка, имеющему левую часть в виде (7.2.4), мы должны допустить появление новых элементов, таких, как (7.2.1), и должны отказаться от возможности получения ньютоновской теории в предельном случае.

### § 3. Теория Бранса и Дикке

Известно, что дальнодействующие силы передаются гравитационным полем  $g_{\mu\nu}$  и электромагнитным потенциалом  $A_\mu$ . Естественно тогда предположить, что могут существовать и дальнодействующие силы, порождаемые скалярными полями. Соответствующие теории предлагались до создания общей теории относительности. В этом параграфе описывается наиболее поздняя и, возможно, наиболее обоснованная теория, в которой скалярное поле также отвечает за гравитацию. Это теория, созданная Брансом и Дикке [2]. Эквивалентная формулировка дана в статье [3].

Отправным пунктом теории Бранса и Дикке является принцип Маха, утверждающий, что явление инерции должно возникать как следствие ускорений относительно общего распределения массы во Вселенной (см. § 3 гл. 1). Таким образом, инерциальные массы различных элементарных частиц не должны быть фундаментальными постоянными, но скорее должны определяться взаимодействием частиц с некоторым космологическим полем. Кроме того, абсолютный масштаб массы элементарных частиц (в противоположность их отношениям, которые, вероятно, никак не связаны с космологическим полем) может быть определен только путем измерения гравитационных ускорений  $Gm/r^2$ . В другой формулировке это означает то, что гравитационная постоянная  $G$  должна быть связана со средним значением скалярного поля  $\phi$ , которое в свою очередь связано с плотностью масс во Вселенной.

Простейшим общековариантным полевым уравнением такого скалярного поля было бы

$$\square^2 \phi = 4\pi\lambda T_{M\mu}^\mu, \quad (7.3.1)$$