а потому (7.2.5) дает следующее уравнение поля:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = -8\pi G T_{\alpha\beta}. \qquad (7.2.7)$$

Тогда для произвольного поля принцип эквивалентности немедленно определяет уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \qquad (7.2.8)$$

поскольку (7.2.8) общековариантно и сводится к (7.2.6) в локально-инерциальных системах координат. Таким образом, если нам потребуется более общее уравнение, чем эйнштейновское, которое в пределе слабых полей сводится к уравнению второго порядка, имеющему левую часть в виде (7.2.4), мы должны допустить появление новых элементов, таких, как (7.2.1), и должны отказаться от возможности получения ньютоновской теории в предельном случае.

§ 3. Теория Бранса и Дикке

Известно, что дальнодействующие силы передаются гравитационным полем $g_{\mu\nu}$ и электромагнитным потенциалом A_μ. Естественно тогда предположить, что могут существовать и дальнодействующие силы, порождаемые скалярными полями. Соответствующие теории предлагались до создания общей теории относительности. В этом параграфе описывается наиболее поздняя и, возможно, наиболее обоснованная теория, в которой скалярное поле также отвечает за гравитацию. Это теория, созданная Брансом и Дикке [2]. Эквивалентная формулировка дана в статье [3].

Отправным пунктом теории Бранса и Дикке является принцип Маха, утверждающий, что явление инерции должно возникать как следствие ускорений относительно общего распределения массы во Вселенной (см. § 3 гл. 1). Таким образом, инерциальные массы различных элементарных частиц не должны быть фундаментальными постоянными, но скорее должны определяться взаимодействием частиц с некоторым космологическим полем. Кроме того, абсолютный масштаб массы элементарных частиц (в противоположность их отношениям, которые, вероятно, никак не связаны с космологическим полем) может быть определен только путем измерения гравитационных ускорений Gm/r^2. В другой формулировке это означает то, что гравитационная постоянная G должна быть связана со средним значением скалярного поля ϕ, которое в свою очередь связано с плотностью масс во Вселенной.

Простейшим общековариантным полевым уравнением такого скалярного поля было бы

$$\Box^2\phi = 4\pi\lambda T^{\mu}_{M\mu}, \qquad (7.3.1)$$

где $\Box^2\phi = \varphi;^\rho;_\rho$ представляет собой инвариантный даламбертиан, λ — постоянная взаимодействия, а $T_M{}^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи, распределенной во Вселенной (всей, кроме поля гравитации и ϕ-поля). Можно грубо оценить среднее значение ϕ, вычисляя центральный потенциал газообразной сферы с космологической плотностью массы $\rho \sim 10^{-29}$ г·см$^{-3}$ и имеющей радиус, равный наблюдаемому радиусу Вселенной $R \sim 10^{28}$ см (см. гл. 14). Это приводит к среднему значению

$$\langle\phi\rangle \sim \lambda\rho R^2 \sim \lambda \times 10^{27} \text{ г·см}^{-1}. \tag{7.3.2}$$

Заметим, что число 10^{27} г·см$^{-1}$ разумно согласуется с постоянной $1/G = 1{,}35 \times 10^{28}$ г·см$^{-1}$ (в единицах, в которых $c = 1$); следовательно, можно нормировать ϕ так, что

$$\langle\phi\rangle \approx \frac{1}{G}, \tag{7.3.3}$$

и тогда (7.3.2) показывает, что λ — безразмерная величина порядка единицы. Подобные рассмотрения позволили Брансу и Дикке предположить, что истинные уравнения поля гравитации получаются заменой G на $1/\phi$ и включением тензора энергии-импульса ϕ-поля $T_\phi^{\mu\nu}$ в источник гравитационного поля:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\phi}\left[T_M{}^{\mu\nu} + T_\phi{}^{\mu\nu}\right]. \tag{7.3.4}$$

Никто, однако, не собирается отказываться от таких достижений принципа эквивалентности, как равенство гравитационной и инертной масс и замедление времени в поле тяготения. Поэтому Бранс и Дикке требуют, чтобы только $g_{\mu\nu}$, а не ϕ входило в уравнения движения частиц и фотонов. Уравнения, описывающие обмен энергией между материей и гравитационным полем, остаются, следовательно, теми же, что и в теории Эйнштейна:

$$T_M{}^\mu{}_{\nu;\,\mu} \equiv \frac{\partial T_M{}^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\rho} T_M{}^\rho{}_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} T_M{}^\mu{}_\rho = 0. \tag{7.3.5}$$

Далее, тождество Бианки говорит о том, что дивергенция от левой части уравнения (7.3.4) равна нулю, а потому, умножив (7.3.4) на ϕ и взяв ковариантную дивергенцию от полученного, приходим к уравнению

$$\left(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R\right)\phi;_\mu = -8\pi T_\phi{}^\mu{}_{\nu;\,\mu}. \tag{7.3.6}$$

Оказывается, что этого требования достаточно для определения $T_\phi{}^\mu{}_\nu$. Симметричный тензор самого общего вида, который можно построить из членов, каждый из которых содержит либо две первые производные от поля, либо одну вторую производную от поля, кроме того, зависит еще от самого поля и записывается следующим образом:

$$T_{\phi}{}^{\mu}{}_{\nu} = A(\phi)\,\phi_;{}^{\mu}\phi_{;\nu} + B(\phi)\,\delta^{\mu}{}_{\nu}\phi_{;\rho}\phi_;{}^{\rho} + \\ + C(\phi)\,\phi_;{}^{\mu}{}_{;\nu} + \delta^{\mu}{}_{\nu}D(\phi)\,\Box^2\phi. \quad (7.3.7)$$

Непосредственные вычисления дают

$$T_{\phi}{}^{\mu}{}_{\nu;\mu} = [A'(\phi) + B'(\phi)]\,\phi_;{}^{\mu}\phi_{;\nu}\phi_{;\mu} + \\ + [A(\phi) + D'(\phi)]\,\phi_{;\nu}\Box^2\phi + \\ + [A(\phi) + 2B(\phi) + C'(\phi)]\,\phi_;{}^{\mu}{}_{;\mu}\phi_{;\mu} + \\ + D(\phi)\,(\Box^2\phi)_{;\nu} + C(\phi)\,\Box^2(\phi_{;\nu}). \quad (7.3.8)$$

(Штрих здесь означает производную по ϕ.) Первый член слева в (7.3.6) определяется выражением (6.5.2), а именно

$$\phi_{;\sigma}R^{\sigma}{}_{\nu} = \phi_;{}^{\mu}{}_{;\mu;\nu} - \phi_{;\nu;}{}^{\mu}{}_{;\mu} = (\Box^2\phi)_{;\nu} - \Box^2(\phi_{;\nu}). \quad (7.3.9)$$

Взяв теперь шпур от уравнения (7.3.4) и используя (7.3.1), находим

$$R = \frac{8\pi}{\phi}\left[\frac{1}{4\pi\lambda}\,\Box^2\phi + (A(\phi) + 4B(\phi))\,\phi_;{}^{\mu}\phi_{;\mu} + (C(\phi) + 4D(\phi))\,\Box^2\phi\right],$$

а потому левая часть уравнения (7.3.6) имеет вид

$$\left(R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}{}_{\nu}R\right)\phi_{;\mu} = (\Box^2\phi)_{;\nu} - \Box^2(\phi_{;\nu}) - \\ - \frac{4\pi}{\phi}\,\phi_{;\nu}\left[\left(\frac{1}{4\pi\lambda}\Box^2 + C(\phi) + 4D(\phi)\right)\Box^2\phi + \right. \\ \left. + (A(\phi) + 4B(\phi))\,\phi_;{}^{\mu}\varphi_{;\mu}\right]. \quad (7.3.10)$$

Сравнивая коэффициенты при $(\Box^2\phi)_{;\nu}$, $\Box^2(\phi_{;\nu})$, $\phi_{;\nu}\Box^2\phi$, $\phi_;{}^{\mu}\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}$ и $\phi_;{}^{\mu}{}_{;\nu}\phi_{;\mu}$ в выражениях (7.3.8) и (7.3.10), находим, что уравнение (7.3.6) требует, чтобы

$$1 = -8\pi D(\phi), \quad -1 = -8\pi C(\phi),$$

$$-\frac{4\pi}{\phi}\left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\phi) + 4D(\phi)\right) = -8\pi\,(A(\phi) + \\ + D'(\phi)) - \frac{4\pi}{\phi}(A(\phi) + 4B(\phi)) = -8\pi\,(A'(\phi) + B'(\phi)),$$

$$0 = A(\varphi) + 2B(\phi) + C'(\phi).$$

Единственное решение этой системы имеет вид

$$A(\phi) = \frac{\omega}{8\pi\phi}, \quad B(\phi) = -\frac{\omega}{16\pi\phi},$$

$$C(\phi) = \frac{1}{8\pi}, \quad D(\phi) = -\frac{1}{8\pi}, \quad (7.3.11)$$

где ω — удобная безразмерная постоянная, определяемая следующим образом:

$$\omega=\frac{1}{\lambda}-\frac{3}{2} \tag{7.3.12}$$

или

$$\lambda=\frac{2}{3+2\omega}.$$

Уравнения поля (7.3.1) и (7.3.4) в теории Бранса и Дикке можно, следовательно, записать так:

$$\Box^2\phi=\frac{8\pi}{3+2\omega}T_M{}^{\mu}{}_{\mu}, \tag{7.3.13}$$

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi}{\phi}T_{M\mu\nu}-$$
$$-\frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho}\right)-\frac{1}{\phi}(\phi_{;\mu;\nu}-g_{\mu\nu}\Box^2\phi). \tag{7.3.14}$$

Наша предыдущая оценка показала, что λ порядка единицы; поэтому мы можем ожидать, что ω того же порядка. Если ω много больше единицы, то (7.3.13) превращается в уравнение $\Box^2\varphi = 0\,(1/\omega)$, откуда вытекает, что

$$\phi=\langle\phi\rangle+0\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{1}{G}+0\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{7.3.15}$$

Подставляя этот результат в (7.3.14), получаем

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-8\pi GT_{M\mu\nu}+0\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Таким образом, теория Бранса и Дикке переходит в теорию Эйнштейна в пределе $\omega\to\infty$.

Надо подчеркнуть, что роль скалярного поля в теории Бранса и Дикке сводится к изменению вида уравнений поля гравитации. Если $g_{\mu\nu}$ известно, то воздействие гравитации на произвольные физические системы определяется точно таким же образом, как и в гл. 3, 4 и 5.

В этой книге почти везде будем предполагать, что никакие скалярные поля φ не дают вкладов в дальнодействующие силы. Однако время от времени мы будем возвращаться к теории Бранса и Дикке, чтобы посмотреть, какие изменения она вносит в теорию тяготения.

§ 4. Координатные условия

Симметричный тензор $G_{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонент, а потому эйнштейновские уравнения поля (7.1.13) состоят из 10 алгебраически независимых уравнений. Неизвестный метрический тензор также имеет 10 алгебраически независимых компонент, и на первый взгляд может показаться, что уравнений