где ω — удобная безразмерная постоянная, определяемая следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} \tag{7.3.12}$$

или

$$\lambda = \frac{2}{3+2\omega}.$$

Уравнения поля (7.3.1) и (7.3.4) в теории Бранса и Дикке можно, следовательно, записать так:

$$\Box^2\phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} T_M{}^\mu{}_\mu, \tag{7.3.13}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\phi} T_{M\mu\nu} - \\ - \frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} - \frac{1}{\phi}(\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Box^2\phi)\right). \tag{7.3.14}$$

Наша предыдущая оценка показала, что λ порядка единицы; поэтому мы можем ожидать, что ω того же порядка. Если ω много больше единицы, то (7.3.13) превращается в уравнение $\Box^2\varphi = 0\,(1/\omega)$, откуда вытекает, что

$$\phi = \langle\phi\rangle + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{G} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{7.3.15}$$

Подставляя этот результат в (7.3.14), получаем

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{M\mu\nu} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Таким образом, теория Бранса и Дикке переходит в теорию Эйнштейна в пределе $\omega \to \infty$.

Надо подчеркнуть, что роль скалярного поля в теории Бранса и Дикке сводится к изменению вида уравнений поля гравитации. Если $g_{\mu\nu}$ известно, то воздействие гравитации на произвольные физические системы определяется точно таким же образом, как и в гл. 3, 4 и 5.

В этой книге почти везде будем предполагать, что никакие скалярные поля φ не дают вкладов в дальнодействующие силы. Однако время от времени мы будем возвращаться к теории Бранса и Дикке, чтобы посмотреть, какие изменения она вносит в теорию тяготения.

§ 4. Координатные условия

Симметричный тензор $G_{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонент, а потому эйнштейновские уравнения поля (7.1.13) состоят из 10 алгебраически независимых уравнений. Неизвестный метрический тензор также имеет 10 алгебраически независимых компонент, и на первый взгляд может показаться, что уравнений

Эйнштейна (с надлежащими граничными условиями) достаточно, чтобы определить $g_{\mu\nu}$ единственным образом. Это, однако, не так.

Хотя 10 компонент $G_{\mu\nu}$ независимы алгебраически, они связаны еще с четырьмя дифференциальными соотношениями — тождествами Бианки [см. (6.8.3)]:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu}=0.$$

Таким образом, существует не 10 функционально независимых уравнений, а только $10-4=6$ уравнений, оставляющих четыре независимые степени свободы в десяти неизвестных компонентах $g_{\mu\nu}$. Эти степени свободы соответствуют тому, что если $g_{\mu\nu}$ — решение уравнений Эйнштейна, то решением его будет также и $g'_{\mu\nu}$, которое получается из $g_{\mu\nu}$ с помощью произвольного преобразования координат $x\to x'$. Такое преобразование координат вводит четыре произвольные функции $x'^{\mu}(x)$, соответствующие как раз четырем степеням свободы в решении уравнений (7.1.13).

Недостаточность эйнштейновских уравнений для определения $g_{\mu\nu}$ единственным образом аналогична недостаточности уравнений Максвелла для однозначного определения вектор-потенциала A_{μ}. Записанные с помощью вектор-потенциала уравнения Максвелла выглядят так:

$$\Box^2 A_{\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}A^{\beta}=-J_{\alpha} \tag{7.4.1}$$

[см. уравнения (2.7.6) и (2.7.11)]. Имеются четыре уравнения для четырех неизвестных, но они не задают A_{α} единственным образом, поскольку левые части этих уравнений связаны дифференциальным тождеством, аналогичным тождествам Бианки:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left\{\Box^2 A^{\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}A^{\beta}\right\}\equiv 0.$$

Таким образом, число функционально независимых уравнений в действительности равно лишь $4-1=3$, и поэтому остается одна степень свободы в решении для четырех компонент A_{α}. Эта степень свободы, конечно, соответствует градиентной инвариантности; зная какое-либо решение A_{α}, мы можем найти другое решение $A'_{\alpha}\equiv A_{\alpha}+\partial\phi/\partial x^{\alpha}$, где ϕ — произвольная функция.

Эта неопределенность в решениях уравнений Максвелла и Эйнштейна может быть устранена одним и тем же способом. Для уравнений Максвелла вопрос решается путем выбора конкретной калибровки. Например, зная какое-нибудь решение A_{α}, мы всегда можем построить решение A'_{α}, такое, что

$$\partial_{\alpha}A'^{\alpha}=0, \tag{7.4.2}$$

положив

$$A'_\alpha \equiv A_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha},$$

где Φ определяется из уравнения

$$\Box^2 \Phi = -\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Говорят, что такое решение *задано в лоренцевой калибровке*. Условие (7.4.2) вместе с тремя независимыми уравнениями (7.4.1) создает систему из четырех уравнений, которые при надлежащих граничных условиях, вообще говоря, определяют четыре компоненты A_α однозначно. Таким же способом, а именно выбрав некоторую конкретную систему координат, можно исключить неоднозначность в метрическом тензоре. Выбор системы может выражаться в виде четырех координатных условий, которые, дополняя шесть независимых уравнений Эйнштейна, приводят к однозначному решению. Особенно удобны *условия гармоничности координат*

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \tag{7.4.3}$$

Чтобы увидеть, что выбор координатной системы в соответствии с этими условиями возможен всегда, вспомним трансформационные уравнения для аффинной связности

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\rho_{\tau\sigma} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}.$$

[См. уравнение (4.5.8).] Свертывая это уравнение с $g'^{\mu\nu}$, находим

$$\Gamma'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho - g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \tag{7.4.4}$$

Следовательно, если Γ^ρ не исчезает, мы можем всегда ввести новую систему координат, решив следующие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho.$$

Тогда уравнение (7.4.4) приводит к $\Gamma'^\lambda = 0$ в системе x'.

Четыре условия (7.4.3) не являются, конечно, общековариантными, так как цель их — удалить неоднозначность, возникающую в метрическом тензоре из-за ковариантности уравнений Эйнштейна. Хотя мы не можем записать эти условия в виде ковариантных уравнений, мы можем придать им более изящную фор-

му, выражая аффинную связность через метрический тензор:

$$\Gamma^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\varkappa} \left\{ \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\varkappa\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} \right\}.$$

Напомним, что

$$g^{\lambda\varkappa} \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^{\nu}} = -g_{\varkappa\mu} \frac{\partial g^{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}},$$

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}} g^{1/2}.$$

[См. (4.7.5).] Отсюда следует

$$\Gamma^{\lambda} = -g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}} (g^{1/2} g^{\lambda\varkappa}), \tag{7.4.5}$$

и условия, приводящие к гармоническим координатам принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}} (\sqrt{g}\, g^{\lambda\varkappa}) = 0. \tag{7.4.6}$$

Теперь мы в состоянии объяснить термин «гармонические координаты». Говорят, что функция ϕ гармоническая, если равно нулю $\Box^2\phi$, где $\Box^2$ есть инвариантный даламбертиан, определяемый следующим образом:

$$\Box^2\phi \equiv (g^{\lambda\varkappa}\phi_{;\lambda})_{;\varkappa}. \tag{7.4.7}$$

Используя (4.7.1), (4.7.7) и (4.7.5), получаем

$$\Box^2\phi = g^{\lambda\varkappa} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{\lambda}\, \partial x^{\varkappa}} - \Gamma^{\lambda} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\lambda}}. \tag{7.4.8}$$

Если $\Gamma^{\lambda} = 0$, то координаты являются гармоническими функциями (7.4.9), оправдывая, таким образом, название «гармоническая» для такой системы координат.

В отсутствие гравитационных полей явно гармоническая система координат — это система Минковского, в которой $g^{\lambda\varkappa} = \eta^{\lambda\varkappa}$ и $g = 1$, так что (7.4.6) выполняется тривиальным образом. При наличии слабых гравитационных полей гармонические системы координат могут рассматриваться как близкие к системе Минковского. Другое, вытекающее отсюда преимущество гармонических координатных условий — это то, что, как показано в гл. 9 и 10, их использование чрезвычайно упрощает уравнения для слабых полей, подобно тому, как лоренцева калибровка упрощает уравнения Максвелла.