§ 5. Задача Коши

Попробуем проникнуть глубже в математическую природу уравнений Эйнштейна, поставив традиционную задачу Коши с начальными условиями. Предположим, что $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ заданы повсюду «в плоскости» $x^0 = t$. Если мы могли бы извлечь из уравнений поля выражение для $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial (x^0)^2$ во всей плоскости $x^0 = t$, мы могли бы затем вычислить $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ в момент времени $x^0 = t + \delta t$ и, продолжая этот процесс, вычислить $g_{\mu\nu}$ для всех x^i и x^0.

На первый взгляд это выглядит осуществимым, поскольку нам необходимо знать 10 производных второго порядка и имеется 10 уравнений поля. Посмотрим, однако, внимательнее на уравнения поля $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - {}^1/_2 g^{\mu\nu} R$. Тождества Бианки (6.8.4) приводят к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x^0} G^{\mu 0} \equiv -\frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} G^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} G^{\mu\lambda}.$$

В правой части здесь нет производных по времени старше чем $\partial^2/\partial (x^0)^2$; нет их и в левой части; следовательно, $G^{\mu 0}$ не содержит временных производных старше чем $\partial/\partial x^0$. Поэтому мы ничего не можем узнать об эволюции во времени гравитационного поля из четырех уравнений

$$G^{\mu 0} = -8\pi G T^{\mu 0}. \tag{7.5.1}$$

Точнее, эти уравнения надо рассматривать как некоторые связи в начальных данных, т. е. условия, налагаемые на $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ при $x^0 = t$.

В качестве «динамических уравнений» остается лишь шесть уравнений Эйнштейна

$$G^{ij} = -8\pi G T^{ij}. \tag{7.5.2}$$

Когда мы разрешаем эти уравнения относительно 10 вторых производных $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial (x^0)^2$, мы сталкиваемся с четырехкратной неоднозначностью, которую, естественно, нет надежды обойти, поскольку всегда возможны преобразования координат, оставляющие неизменными $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ при $x^0 = t$, но которые все же изменяют $g_{\mu\nu}$ в остальном пространстве. Точнее, мы находим, что (7.5.2) определяет шесть величин $\partial^2 g^{ij}/\partial (x^0)^2$, но оставляет неопределенными остальные четыре $\partial^2 g^{\mu 0}/\partial (x^0)^2$. От этой неопределенности можно избавиться, только наложив четыре координатных условия, фиксирующие систему координат. Например, если мы наложим гармоническое координатное условие, введенное в предыдущем параграфе, вторая производная по времени от $\sqrt{g}\, g^{\mu 0}$ может быть найдена дифференцированием (7.4.6) по времени:

$$\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} (\sqrt{g}\, g^{\mu 0}) = -\frac{\partial^2}{\partial x^0\, \partial x^i} \sqrt{g}\, g^{\mu i}. \tag{7.5.3}$$

Тогда десяти уравнений (7.5.2) и (7.5.3) достаточно для нахождения вторых производных по времени от всех компонент $g_{\mu\nu}$.

Если начальная задача решается таким образом, то условия (7.5.1) на начальные данные достаточно удовлетворить в один момент времени. Тождество Бианки и условие сохранения энергии и импульса утверждают, что независимо от того, удовлетворяются или нет уравнения поля, должно выполняться соотношение

$$(G^{\mu\nu} + 8\pi G T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0.$$

Рассмотрим это выражение при $x^0 = t$. Накладывая на начальные данные дополнительные условия (7.5.1) и находя вторые производные из уравнения (7.5.2), убеждаемся в том, что в последнем выражении величина в скобках равна нулю везде при $x^0 = t$, откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(G^{\mu 0} + 8\pi G T^{\mu 0}) = 0 \quad \text{при } x^0 = t,$$

а потому поля, вычисленные в момент времени $x^0 = t + dt$, будут также автоматически удовлетворять условиям (7.5.1). Таким образом, этот метод решения проблемы с начальными условиями таков, что если мы знаем начальную метрику $x^0 = t$, удовлетворяющую условиям (7.5.1), то он может быть запрограммирован для вычислительной машины.

§ 6. Энергия, импульс и угловой момент гравитационного поля

Физический смысл уравнений Эйнштейна можно выявить, записав их в полностью эквивалентной, хотя и не в ковариантной, форме, которая указывает на их связь с волновыми уравнениями физики элементарных частиц. Выберем систему координат, почти совпадающую с системой Минковского в том смысле, что на больших расстояниях от изучаемой материальной системы, имеющей конечные размеры, метрика $g_{\mu\nu}$ будет приближаться к метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$. (К этому классу относятся гармонические системы координат и некоторые другие.) В этом случае пишем

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{7.6.1}$$

причем $h_{\mu\nu}$ исчезает на бесконечности. (Однако не предполагается, что $h_{\mu\nu}$ мало повсюду.) Часть тензора Риччи, линейная по $h_{\mu\nu}$, равняется

$$R^{(1)}{}_{\mu\varkappa} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x_{\lambda}}\right). \tag{7.6.2}$$