Часть III

ПРИМЕНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Общепринятые суждения во все времена и во всех странах имеют тенденцию основываться на числах при оценке убедительности свидетельств.

Уигмор, О Свидетельстве

Глава 8

КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЫТЫ ПО ПРОВЕРКЕ ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА

Эйнштейн предложил три способа проверки общей теории относительности, основанных на измерениях:

А. Гравитационного красного смещения спектральных линий.

Б. Отклонения света Солнцем.

В. Прецессии перигелия орбит внутренних планет.

За прошедшее время был выполнен еще один эксперимент по проверке общей теории относительности:

Г. Измерение временного запаздывания радарного эха, приходящего от Солнца.

Скоро также будет измерена

Д. Прецессия гироскопа на земной орбите.

Все пять опытов выполняются в пустом пространстве и в таких гравитационных полях, которые в хорошем приближении можно считать статическими (исключая опыт Д) и сферически симметричными. Таким образом, наша первая задача — решить уравнения Эйнштейна в вакууме при упрощающих предположениях об изотропности полей и независимости их от времени. Эти результаты будут затем использованы для рассмотрения опыта Б с помощью опыта Г. В гл. 3 мы уже видели, что опыты типа А позволяют проверять только принцип эквивалентности, поэтому нет необходимости рассматривать его здесь. Опыт Д связан с анизотропными эффектами, возникающими из-за вращения Земли, и будет обсуждаться в следующей главе.

§ 1. Общий случай статической изотропной метрики

На некоторое время оставим уравнения Эйнштейна и найдем в самом общем виде метрический тензор, представляющий статическое изотропное гравитационное поле. «Статическое и изотропное» означает следующее: всегда можно найти набор координат, близкий к координатам Минковского x^1, x^2, x^3, $x^0 \equiv t$, такой, что инвариантное собственное время $d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ не зависит от t, а зависит от $\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}$ только через инварианты группы трехмерных вращений: $d\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^2$. Наиболее общий вид записи для интервала собственного времени:

$$d\tau^2 = F(r)\,dt^2 - 2E(r)\,dt\ \mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} - D(r)\,(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2 - C(r)\,d\mathbf{x}^2, \qquad (8.1.1)$$

где F, E, D и C — неизвестные функции величины

$$r \equiv (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}.$$

(Скалярные произведения трехмерных векторов определены во всей этой главе обычным образом, например: $\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3$ и т. д.) Более глубокое обоснование выражения (8.1.1) будет дано в гл. 13. Для настоящих целей можно рассматривать (8.1.1) как определение статической изотропной метрики или, альтернативно, как исходную формулу, которая позволит нам отыскать некоторые из решений уравнений поля.

Удобно заменить $\mathbf{x}$ сферическими полярными координатами r, θ, φ, определенными обычным образом:

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta.$$

Интервал собственного времени (8.1.1) принимает тогда вид

$$d\tau^2 = F(r)\,dt^2 - 2rE(r)\,dt\,dr - r^2D(r)\,dr^2 - C(r)\,(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (8.1.2)$$

Мы вольны установить наши часы в соответствии с определением новой временной координаты

$$t' \equiv t + \Phi(r),$$

где Φ — произвольная функция r. Это позволяет исключить недиагональный элемент g_{tr}, положив

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}.$$

Тогда интервал собственного времени (8.1.2) выражается следующим образом:

$$d\tau^2 = F(r)\,dt'^2 - G(r)\,dr^2 - C(r)\,(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad (8.1.3)$$

где

$$G(r) \equiv r^2 \left(D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right).$$

Мы можем также переопределить радиус r и наложить тем самым еще одну связь на функции F, G и C. Например, предположим, что мы ввели

$$r'^2 \equiv C(r)\, r^2.$$

Тогда выражение (8.1.3) записывается в так называемой стандартной форме

$$d\tau^2 = B(r')\, dt'^2 - A(r')\, dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (8.1.4)$$

где

$$B(r') \equiv F(r),$$

$$(r') \equiv \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right) \left(1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr}\right)^{-2}.$$

Альтернативно можно было бы определить

$$r' = \exp \int \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right)^{1/2} \frac{dr}{r},$$

и тогда (8.1.3) записалось бы в так называемой *изотропной форме*:

$$d\tau^2 = H(r'')\, dt'^2 - J(r'') (dr''^2 + r''^2\, d\theta^2 + r''^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (8.1.5)$$

$$H(r'') \equiv F(r),$$

$$J(r'') \equiv \frac{C(r)\, r^2}{r''^2}$$

Большей частью мы будем иметь дело со «стандартной» формой

$$d\tau^2 = B(r)\, dt^2 - A(r)\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (8.1.6)$$

(Штрихи у r и t далее будем опускать.) Метрический тензор имеет следующие неисчезающие компоненты:

$$g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \quad g_{tt} = -B(r), \qquad (8.1.7)$$

где функции $A(r)$ и $B(r)$ должны быть определены путем решения уравнений поля. Так как $g_{\mu\nu}$ — диагональный тензор, легко написать все неисчезающие компоненты тензора, обратного ему:

$$g^{rr} = A^{-1}(r), \qquad g^{\theta\theta} = r^{-2},$$

$$g^{\varphi\varphi} = r^{-2} (\sin\theta)^{-2}, \qquad g^{tt} = -B^{-1}(r). \qquad (8.1.8)$$

Кроме того, детерминант метрического тензора равен $-g$, где

$$g = r^4 A(r)\, B(r) \sin^2\theta, \qquad (8.1.9)$$

так что инвариантный элемент объема имеет вид

$$\sqrt{g}\,dr\,d\theta\,d\varphi = r^2\sqrt{A(r)\,B(r)}\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi. \tag{8.1.10}$$

Аффинная связность может быть вычислена с помощью обычной формулы:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right).$$

Ее неисчезающие компоненты оказываются равными:

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dA(r)}{dr}, \qquad \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -\frac{r}{A(r)},$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -\frac{r\sin^2\theta}{A(r)}, \qquad \Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dB(r)}{dr},$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg} 0,$$

$$\Gamma^{t}_{tr} = \Gamma^{t}_{rt} = \frac{1}{2B(r)}\frac{dB(r)}{dr}. \tag{8.1.11}$$

Нам необходим также тензор Риччи. Он задается формулами (6.2.4) и (6.1.5) следующим образом:

$$R_{\mu\varkappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}. \tag{8.1.12}$$

Заметим, что, несмотря на его внешний вид, первый член в нем симметричен по μ и $\varkappa$, поскольку из (4.7.6) следует, что $\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$ равно $^1/_2\,\partial\ln g/\partial x^{\mu}$.] Подставляя в (8.1.12) компоненты аффинной связности (8.1.11), находим

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{B(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}\right), \tag{8.1.13}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) + \frac{1}{A(r)},$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta},$$

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right),$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu.$$

(Штрих теперь означает дифференцирование по r.) Вывод о том, что $R_{r\theta}$, $R_{r\varphi}$, $R_{t\theta}$, $R_{t\varphi}$ и $R_{\theta\varphi}$ исчезают, и о том, что $R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$, является просто следствием инвариантности метрики относительно вращений. Равенство нулю R_{rt} связано с тем, что мы установили наши часы так, что метрика оказалась инвариантной при обращении времени $t \to -t$.

Ни стандартные, ни изотропные координаты не являются гармоническими, но легко использовать для построения гармонических координат X_1, X_2, X_3, t результаты (8.1.7) и (8.1.11), найденные для метрики и аффинной связности и записанные в стандартных координатах. Введем гармонические координаты так:

$$X_1 = R(r) \sin\theta \cos\varphi, \qquad X_2 = R(r) \sin\theta \sin\varphi,$$
$$X_3 = R(r) \cos\theta. \tag{8.1.14}$$

Тогда непосредственные вычисления дадут

$$\Box^2 X_i \equiv g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial X_i}{\partial x^\lambda}\right] =$$
$$= \left(\frac{X_i}{AR}\right)\left[\left(\frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} - \frac{A'}{2A}\right) R' + R'' - \frac{2A}{r^2} R\right]$$

и

$$\Box^2 t = 0$$

для стандартной временной координаты t.

Таким образом, координаты X_1, X_2, X_3, t являются гармоническими, если $R(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 B^{1/2} A^{-1/2}\frac{dR}{dr}\right) - 2A^{1/2}B^{1/2}R = 0. \tag{8.1.15}$$

В этих гармонических координатах собственное время (8.1.6) записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = B\,dt^2 - \frac{r^2}{R^2}\,d\mathbf{X}^2 - \left[\frac{A}{R^2 R'^2} - \frac{r^2}{R^4}\right](\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X})^2. \tag{8.1.16}$$

§ 2. Решение Шварцшильда

Рассмотрим теперь уравнения поля Эйнштейна в общей статической изотропной метрике. Воспользуемся стандартной формой, введенной в предыдущем параграфе, т. е.

$$d\tau^2 = B(r)\,dt^2 - A(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{8.2.1}$$

Уравнения поля Эйнштейна в пустом пространстве имеют вид

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{8.2.2}$$

В рассматриваемой метрике компоненты тензора Риччи задаются выражениями (8.1.13). Из них видно, что достаточно приравнять нулю компоненты R_{rr}, $R_{\theta\theta}$ и R_{tt}. Видно также, что выполняется соотношение

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right), \tag{8.2.3}$$