Ни стандартные, ни изотропные координаты не являются гармоническими, но легко использовать для построения гармонических координат X_1, X_2, X_3, t результаты (8.1.7) и (8.1.11), найденные для метрики и аффинной связности и записанные в стандартных координатах. Введем гармонические координаты так:

$$X_1 = R(r)\sin\theta\cos\varphi, \qquad X_2 = R(r)\sin\theta\sin\varphi,$$
$$X_3 = R(r)\cos\theta. \tag{8.1.14}$$

Тогда непосредственные вычисления дадут

$$\Box^2 X_i \equiv g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial X_i}{\partial x^\lambda}\right] =$$
$$= \left(\frac{X_i}{AR}\right)\left[\left(\frac{B'}{2B}+\frac{2}{r}-\frac{A'}{2A}\right)R' + R'' - \frac{2A}{r^2}R\right]$$

и

$$\Box^2 t = 0$$

для стандартной временной координаты t.

Таким образом, координаты X_1, X_2, X_3, t являются гармоническими, если $R(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 B^{1/2}A^{-1/2}\frac{dR}{dr}\right) - 2A^{1/2}B^{1/2}R = 0. \tag{8.1.15}$$

В этих гармонических координатах собственное время (8.1.6) записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = B\,dt^2 - \frac{r^2}{R^2}\,d\mathbf{X}^2 - \left[\frac{A}{R^2R'^2} - \frac{r^2}{R^4}\right](\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X})^2. \tag{8.1.16}$$

§ 2. Решение Шварцшильда

Рассмотрим теперь уравнения поля Эйнштейна в общей статической изотропной метрике. Воспользуемся стандартной формой, введенной в предыдущем параграфе, т. е.

$$d\tau^2 = B(r)\,dt^2 - A(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2. \tag{8.2.1}$$

Уравнения поля Эйнштейна в пустом пространстве имеют вид

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{8.2.2}$$

В рассматриваемой метрике компоненты тензора Риччи задаются выражениями (8.1.13). Из них видно, что достаточно приравнять нулю компоненты R_{rr} $R_{\theta\theta}$ и R_{tt}. Видно также, что выполняется соотношение

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right), \tag{8.2.3}$$

а потому (8.2.2) требует равенства $B'/B = -A'/A$ или

$$A(r)\,B(r) = \text{const}. \tag{8.2.4}$$

Наложим далее на A и B граничные условия, вытекающие из требования, чтобы метрический тензор при $r \to \infty$ стремился к тензору Минковского, записанному в сферических координатах:

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1. \tag{8.2.5}$$

Тогда из (8.2.4) и (8.2.5) следует

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \tag{8.2.6}$$

Так как выражение (8.2.3) теперь равно нулю, остается приравнять нулю R_{rr} и $R_{\theta\theta}$. Подставляя (8.2.6) в (8.1.13), получаем

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)\,r + B(r), \tag{8.2.7}$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)}, \tag{8.2.8}$$

так что оказывается достаточным приравнять нулю $R_{\theta\theta}$, т. е.

$$\frac{d}{dr}(rB(r)) = rB'(r) + B(r) = 1.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$rB(r) = r + \text{const}. \tag{8.2.9}$$

Чтобы отыскать постоянную интегрирования, вспомним, что на больших расстояниях от центральной массы M компонента $g_{tt} \equiv -B$ должна стремиться к величине $(-1 - 2\phi)$, где ϕ — ньютоновский потенциал, равный $-MG/r$ (см. § 4 гл. 3). Следовательно, константа интегрирования равна $-2MG$ и в окончательном виде решение выглядит так:

$$B(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right], \tag{8.2.10}$$

$$A(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1}. \tag{8.2.11}$$

Тогда полная метрика записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]dt^2 - \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2\,d\theta - r^2 \sin^2\theta\,d\varphi^2. \tag{8.2.12}$$

Это решение было найдено Шварцшильдом в 1916 г.

Решение Шварцшильда найдено нами в «стандартной» форме. Мы можем также записать его в эквивалентной «изотропной» форме, вводя новую переменную для радиуса:

$$\rho \equiv \frac{1}{2}\left[r - MG + (r^2 - 2MGr)^{1/2}\right] \tag{8.2.13}$$

или

$$r=\rho\left(1+\frac{MG}{2\rho}\right)^2.$$

Подставляя это выражение в (8.2.12), получаем

$$d\tau^2=\frac{(1-MG/2\rho)^2}{(1+MG/2\rho)^2}\,dt^2-\left(1+\frac{MG}{2\rho}\right)^4(d\rho^2+\rho^2\,d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{8.2.14}$$

Можно также построить гармонические координаты

$$X_1=R\sin\theta\cos\varphi,\qquad X_2=R\sin\theta\sin\varphi,\qquad X_3=R\cos\theta;\ t,$$

где в качестве R следует использовать решение дифференциального уравнения (8.1.15), имеющего вид

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\left[1-\frac{2MG}{r}\right]\frac{dR}{dr}\right)-2R=0.$$

Выберем следующее его решение:

$$R=r-MG.$$

Тогда метрика будет выглядеть так:

$$d\tau^2=\left(\frac{1-MG/R}{1+MG/R}\right)dt^2-\left(1+\frac{MG}{R}\right)^2 d\mathbf{X}^2-\\ -\left(\frac{1+MG/R}{1-MG/R}\right)\frac{M^2G^2}{R^4}(\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X})^2, \tag{8.2.15}$$

где, естественно, $R^2\equiv\mathbf{X}^2$.

Ориентируясь на ньютоновскую теорию, приравняем постоянную интегрирования M массе Солнца. И действительно, можно показать, что M точно равно полной энергии P^0 Солнца, *включая энергию его гравитационного поля.* Запишем метрику в стандартной форме в соответствии с определениями

$$x^1\equiv r\sin\theta\cos\varphi,\quad x^2=r\sin\theta\sin\varphi,\quad x^3=r\cos\theta.$$

Тогда формула (8.2.12) переписывается в виде

$$d\tau^2=\left[1-\frac{2MG}{r}\right]dt^2-\left\{\left[1-\frac{2MG}{r}\right]^{-1}-1\right\}r^{-2}(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2-d\mathbf{x}^2.$$

Так как $g_{\mu\nu}$ не зависит от времени, а g_{i0} исчезает, из формулы (7.6.22) следует, что полный импульс системы P^i равен нулю. Но так и должно быть, поскольку рассматриваемая система — статическая и изотропная. Чтобы вычислить полную энергию, нужно выяснить асимптотическое поведение пространственной части метрики. Когда $r\to\infty$, получаем

$$h_{ij}\equiv g_{ij}-\delta_{ij}\to\frac{2MG}{r}n_in_j+O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

где $n_i \equiv x^i/r$. Чтобы вычислить теперь интеграл (7.6.21), воспользуемся выражениями

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = n_i, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial x^j} = \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{r}$$

и найдем

$$\frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} \to -\frac{4MG}{r^2} n_i + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

так что формула (7.6.23) приводит в этом случае к полной энергии вещества и гравитационного поля, равной

$$P^0 = M. \tag{8.2.16}$$

Читатель может убедиться, что тот же самый результат следует из изотропной и гармонической форм решения Шварцшильда. И наконец, формула (7.6.24), как и следовало ожидать, дает для полного углового момента системы нулевое значение.

§ 3. Другие метрики

Общие кинематические ограничения, накладываемые принципом эквивалентности, имеют гораздо более твердое обоснование, чем уравнения поля Эйнштейна. Действительно, в гл. 3, 4, 5 мы перешли почти с неизбежностью от равенства гравитационной и инертной масс к полному аппарату тензорного анализа и общей ковариантности. Напротив, вывод уравнений Эйнштейна в гл. 7 содержал ряд догадок и, во всяком случае, не решал вопроса о существовании дальнодействующего скалярного поля типа поля Бранса — Дикке, изменяющего сами уравнения. Поэтому очень полезно, проверяя теорию относительности, считать, что, хотя законы движения частиц и фотонов в данном метрическом поле $g_{\mu\nu}$ остаются справедливыми, сама метрика может отличаться от той, которую дают уравнения Эйнштейна.

В любом случае мы могли бы ожидать, что метрика, создаваемая сферически симметричным телом, подобным Солнцу, должна выражаться в «стандартной», «изотропной» и «гармонической» формах, найденных в § 1 этой главы. Далее, мы могли бы предполагать, что метрические коэффициенты [например, $A(r)$ и $B(r)$] могут быть разложены в степенные ряды по малому параметру MG/r. Такое разложение метрики в изотропной форме было найдено Эддингтоном и Робертсоном [1, 2]:

$$d\tau^2 = \left(1 - 2\alpha\frac{MG}{\rho} + 2\beta\frac{M^2G^2}{\rho^2} + \ldots\right) dt^2 -$$
$$- \left(1 + 2\gamma\frac{MG}{\rho} + \ldots\right)(d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{8.3.1}$$