где $n_i \equiv x^i/r$. Чтобы вычислить теперь интеграл (7.6.21), воспользуемся выражениями

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = n_i, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial x^j} = \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{r}$$

и найдем

$$\frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} \to -\frac{4MG}{r^2} n_i + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

так что формула (7.6.23) приводит в этом случае к полной энергии вещества и гравитационного поля, равной

$$P^0 = M. \tag{8.2.16}$$

Читатель может убедиться, что тот же самый результат следует из изотропной и гармонической форм решения Шварцшильда. И наконец, формула (7.6.24), как и следовало ожидать, дает для полного углового момента системы нулевое значение.

§ 3. Другие метрики

Общие кинематические ограничения, накладываемые принципом эквивалентности, имеют гораздо более твердое обоснование, чем уравнения поля Эйнштейна. Действительно, в гл. 3, 4, 5 мы перешли почти с неизбежностью от равенства гравитационной и инертной масс к полному аппарату тензорного анализа и общей ковариантности. Напротив, вывод уравнений Эйнштейна в гл. 7 содержал ряд догадок и, во всяком случае, не решал вопроса о существовании дальнодействующего скалярного поля типа поля Бранса — Дикке, изменяющего сами уравнения. Поэтому очень полезно, проверяя теорию относительности, считать, что, хотя законы движения частиц и фотонов в данном метрическом поле $g_{\mu\nu}$ остаются справедливыми, сама метрика может отличаться от той, которую дают уравнения Эйнштейна.

В любом случае мы могли бы ожидать, что метрика, создаваемая сферически симметричным телом, подобным Солнцу, должна выражаться в «стандартной», «изотропной» и «гармонической» формах, найденных в § 1 этой главы. Далее, мы могли бы предполагать, что метрические коэффициенты [например, $A(r)$ и $B(r)$] могут быть разложены в степенные ряды по малому параметру MG/r. Такое разложение метрики в изотропной форме было найдено Эддингтоном и Робертсоном [1, 2]:

$$d\tau^2 = \left(1 - 2\alpha\frac{MG}{\rho} + 2\beta\frac{M^2G^2}{\rho^2} + \ldots\right) dt^2 - \\ - \left(1 + 2\gamma\frac{MG}{\rho} + \ldots\right)(d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{8.3.1}$$

где α, β и γ — неизвестные безразмерные параметры. (Причина, по которой в разложении g_{00} удерживаются члены до порядка M^2G^2/ρ^2, а в g_{ij} — только до порядка MG/ρ, состоит в том, что в приложении к небесной механике пространственная часть метрики g_{ij} всегда умножается на дополнительный коэффициент $v^2 \sim MG/\rho$.) Сравнивая (8.3.1) с изотропной формой (8.2.14) решения Шварцшильда, видим, что уравнения поля Эйнштейна приводят к равенствам

$$\alpha = \beta = \gamma = 1. \tag{8.3.2}$$

Напротив, теория Бранса и Дикке (§ 3 гл. 7) приводит к метрике (§ 9 гл. 9), которую можно выразить в форме (8.3.1), где

$$\alpha = \beta = 1, \qquad \gamma = \frac{\omega+1}{\omega+2}, \tag{8.3.3}$$

причем ω здесь — неизвестный параметр этой теории. Для того чтобы решить, какие из полученных уравнений правильны — Эйнштейна, Бранса и Дикке или какие-нибудь еще, надо измерить α, β и γ. Вообще говоря, мы будем проводить вычисления с метрикой в ее стандартной форме, так что удобно преобразовать ее с помощью робертсоновского разложения (8.3.1) к этому виду, пользуясь определением

$$r \equiv \rho\left(1 + \gamma\frac{MG}{\rho} + \ldots\right) \tag{8.3.4}$$

или

$$\rho = r\left(1 - \gamma\frac{MG}{r} + \ldots\right).$$

Простое вычисление позволяет найти

$$d\tau^2 = \left(1 - 2\alpha\frac{MG}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\frac{M^2G^2}{r^2} + \ldots\right)dt^2 -$$
$$- \left(1 + 2\gamma\frac{MG}{r} + \ldots\right)dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2. \tag{8.3.5}$$

Мы можем также построить гармонические координаты $\mathbf{X}$, t, используя для $\mathbf{X}$

$$X_1 = R\sin\theta\cos\varphi, \quad X_2 = R\sin\theta\sin\varphi, \quad X_3 = R\cos\theta,$$

где R удовлетворяет дифференциальному уравнению (8.1.15):

$$0 = \frac{d}{dr}r^2\left(1 - (\alpha+\gamma)\frac{MG}{r} + \ldots\right)\frac{dR}{dr} - 2\left(1 - (\alpha-\gamma)\frac{MG}{r} + \ldots\right)R.$$

Решение его имеет вид

$$R = \left(1 + \frac{(\alpha - 3\gamma)\,MG}{2r} + \ldots\right)r, \tag{8.3.6}$$

и (8.1.16) приводит к следующей метрике (где $R^2 \equiv \mathbf{X}^2$):

$$d\tau^2 = \left[1 - 2\alpha \frac{MG}{R} + (\alpha\gamma - \alpha^2 + 2\beta \frac{M^2G^2}{R^2} + \ldots\right] dt^2 -$$

$$- \left[1 + \frac{(3\gamma - \alpha) MG}{R} + \ldots\right] d\mathbf{X}^2 - \frac{[(\alpha - \gamma) MG/R + \ldots] (\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^2}{R^2}. \quad (8.3.7)$$

Сравнение (8.3.5) и (8.3.7) с соответствующими точными решениями (8.2.12) и (8.2.15) опять показывает, что теория Эйнштейна дает $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Предсказание о том, что $\alpha = 1$, сразу следует из эмпирического определения массы M. Заметим, что выражение (8.3.1) предсказывало бы для медленно движущейся частицы, далекой от начала координат, центростремительное ускорение, равное

$$-g = -\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = -\frac{\alpha MG}{r^2}$$

$$(\text{для } MG/r \ll 1 \text{ и } v^2 \ll 1),$$

в то время как массы Солнца и планет в действительности *измеряются* путем приравнивания g к MG/r^2. Следовательно, мы должны ввести α в M или, другими словами, положить $\alpha = 1$. Только в том случае, если бы оказалось возможным определить M с помощью некоторого независимого негравитационного измерения, имело бы смысл спрашивать, действительно ли α точно равно единице. При $\alpha = 1$ метрические функции, задаваемые (8.3.5), таковы

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r^2} + 2(\beta - \gamma) \frac{M^2G^2}{r^2} + \ldots, \quad (8.3.8)$$

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{MG}{r} + \ldots. \quad (8.3.9)$$

Как показано в гл. 3, при измерении гравитационного красного смещения определяется только член $-2MG/r$ в $B(r)$ и, следовательно, проверяется только принцип эквивалентности. Мы увидим что из других опытов по проверке общей теории относительности, перечисленных в начале этой главы, с помощью Б и Г можно обнаружить только, действительно ли $\gamma \approx 1$, в то время как с помощью В — с помощью наблюдения прецессии перигелия — проверяется соотношение $2\gamma - \beta \approx 1$. (С точностью до пренебрежения вращением Земли эксперимент Д также проверяет, равно ли $\gamma \approx 1$.)

§ 4. Общий вид уравнений движения

Рассмотрим теперь движение свободно падающей материальной частицы или фотона в статическом изотропном гравитационном поле. Сначала рассмотрим наиболее общий вид метрики, задан-