и (8.1.16) приводит к следующей метрике (где $R^2 \equiv \mathbf{X}^2$):

$$d\tau^2 = \left[1 - 2\alpha \frac{MG}{R} + (\alpha\gamma - \alpha^2 + 2\beta \frac{M^2G^2}{R^2} + \ldots\right] dt^2 -$$

$$- \left[1 + \frac{(3\gamma - \alpha) MG}{R} + \ldots\right] d\mathbf{X}^2 - \frac{[(\alpha - \gamma) MG/R + \ldots] (\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^2}{R^2}. \quad (8.3.7)$$

Сравнение (8.3.5) и (8.3.7) с соответствующими точными решениями (8.2.12) и (8.2.15) опять показывает, что теория Эйнштейна дает $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Предсказание о том, что $\alpha = 1$, сразу следует из эмпирического определения массы M. Заметим, что выражение (8.3.1) предсказывало бы для медленно движущейся частицы, далекой от начала координат, центростремительное ускорение, равное

$$-g = -\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = -\frac{\alpha MG}{r^2}$$

$$(\text{для } MG/r \ll 1 \text{ и } v^2 \ll 1),$$

в то время как массы Солнца и планет в действительности *измеряются* путем приравнивания g к MG/r^2. Следовательно, мы должны ввести α в M или, другими словами, положить $\alpha = 1$. Только в том случае, если бы оказалось возможным определить M с помощью некоторого независимого негравитационного измерения, имело бы смысл спрашивать, действительно ли α точно равно единице. При $\alpha = 1$ метрические функции, задаваемые (8.3.5), таковы

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r^2} + 2(\beta - \gamma) \frac{M^2G^2}{r^2} + \ldots, \quad (8.3.8)$$

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{MG}{r} + \ldots . \quad (8.3.9)$$

Как показано в гл. 3, при измерении гравитационного красного смещения определяется только член $-2MG/r$ в $B(r)$ и, следовательно, проверяется только принцип эквивалентности. Мы увидим что из других опытов по проверке общей теории относительности, перечисленных в начале этой главы, с помощью Б и Г можно обнаружить только, действительно ли $\gamma \approx 1$, в то время как с помощью В — с помощью наблюдения прецессии перигелия — проверяется соотношение $2\gamma - \beta \approx 1$. (С точностью до пренебрежения вращением Земли эксперимент Д также проверяет, равно ли $\gamma \approx 1$.)

§ 4. Общий вид уравнений движения

Рассмотрим теперь движение свободно падающей материальной частицы или фотона в статическом изотропном гравитационном поле. Сначала рассмотрим наиболее общий вид метрики, заданный в стандартной форме (см. § 1 этой главы), т. е.

$$d\tau^2 = B(r)\,dt^2 - A(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2. \qquad (8.4.1)$$

Уравнения свободного падения имеют вид

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0, \qquad (8.4.2)$$

где p — параметр, описывающий траекторию. Вообще, $d\tau$ пропорционально dp, а потому для материальной частицы мы можем нормировать p так, чтобы сделать $p = \tau$. Однако для фотона константа пропорциональности $d\tau/dp$ равна нулю, а так как мы хотим рассматривать фотоны наравне с массивными частицами, удобно сохранить свободу нормировать p независимо от нормировки τ. Подставляя в (8.4.2) ненулевые компоненты аффинной связности, задаваемой (8.1.11), получаем:

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 -$$

$$- r\frac{\sin\theta}{A(r)}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2, \qquad (8.4.3)$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dp}\frac{dr}{dp} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2, \qquad (8.4.4)$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dp}\frac{dr}{dp} + 2\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\theta}{dp}, \qquad (8.4.5)$$

$$0 = \frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)}\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp}. \qquad (8.4.6)$$

(Штрих означает d/dr.) Мы решим эти уравнения, отыскивая интегралы движения.

Так как поле изотропно, можно считать, что орбита рассматриваемой частицы расположена в экваториальной плоскости, т. е.

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \qquad (8.4.7)$$

Тогда (8.4.4) удовлетворяется тривиально, и мы можем забыть о θ как о динамической переменной. Разделив затем уравнения (8.4.5) и (8.4.6) на $d\varphi/dp$ и dt/dp соответственно, находим

$$\frac{d}{dp}\left\{\ln\frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2\right\} = 0, \qquad (8.4.8)$$

$$\frac{d}{dp}\left\{\ln\frac{dt}{dp} + \ln B\right\} = 0. \qquad (8.4.9)$$

Это приводит к двум интегралам движения. Один из них можно включить в определение p, поскольку p выбирается таким образом, чтобы решение (8.4.9) имело вид

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)}. \qquad (8.4.10)$$

Так как величина $B(r)$ близка к единице, то параметр p почти равен координатному времени t. Другой интеграл движения получается с помощью (8.4.8) и играет роль углового момента для единицы массы:

$$r^2\frac{d\varphi}{dp}=J\,(\text{const}). \tag{8.4.11}$$

Подставляя (8.4.7), (8.4.10) и (8.4.11) в (8.4.3), переписываем это последнее оставшееся уравнение движения в виде

$$0=\frac{d^2r}{dp^2}+\frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2-\frac{J^2}{r^3A(r)}+\frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)}. \tag{8.4.12}$$

Умножая это уравнение на $2A(r)\,dr/dp$, можно переписать его так:

$$\frac{d}{dp}\left\{A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}\right\}=0.$$

Тогда последний неизвестный интеграл движения оказывается равным

$$A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}=-E\,(\text{const}). \tag{8.4.13}$$

Собственное время τ можно теперь найти с помощью (8.4.1), (8.4.7), (8.4.10), (8.4.11) и (8.4.13); полученный результат

$$d\tau^2=E\,dp^2 \tag{8.4.14}$$

находится в соответствии с ранее сделанным замечанием о том, что (8.4.2) требует, чтобы производная $d\tau/dp$ была постоянной. Мы видим, что

$$E>0 \text{ для материальных частиц,} \tag{8.4.15}$$

$$E=0 \text{ для фотонов.} \tag{8.4.16}$$

Заметим также, что $A(r)$ на практике всегда положительно, а потому (8.4.13) говорит о том, что рассматриваемая частица может достигать радиуса r только в том случае, если выполняется условие

$$\frac{J^2}{r^2}+E\leqslant\frac{1}{B(r)}. \tag{8.4.17}$$

Параметр p можно везде исключить подстановкой (8.4.10) в (8.4.11), (8.4.13) и (8.4.14). В результате получаем

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=JB(r), \tag{8.4.18}$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}=-E, \tag{8.4.19}$$

$$d\tau^2=EB^2(r)\,dt^2. \tag{8.4.20}$$

Для медленно движущейся частицы в слабом поле величины J^2/r^2, $(dr/dt)^2$, $A - 1$ и $B - 1 \approx 2\phi$ будут все малы, и в первом порядке по этим величинам вышеприведенные уравнения движения записываются следующим образом:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} \approx J,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi \approx \frac{1-E}{2}.$$

Это те же самые уравнения, которые получались бы в теории Ньютона с учетом того, что величина $(1 - E)/2$ выполняет роль энергии, приходящейся на единицу массы.

Для наглядности рассмотрим точные уравнения движения для простого случая частицы, движущейся по круговой орбите радиусом R. Так как dr/dt равно нулю, уравнение (8.4.19) имеет вид

$$\frac{J^2}{R^2} - \frac{1}{B(R)} + E = 0. \tag{8.4.21}$$

Далее, чтобы на этом радиусе частица находилась в состоянии равновесия, производная по R от левой части должна равняться нулю:

$$-\frac{2J^2}{R^3} + \frac{B'(R)}{B^2(R)} = 0. \tag{8.4.22}$$

[Если мы будем рассматривать окружность как предельный случай эллипса с перигелием $R - \delta$ и афелием $R + \delta$, тогда (8.4.19) показывает, что величина $J^2/r^2 - 1/B(r) + E$ должна равняться нулю при $r = R \pm \delta$, а это дает соотношения (8.4.21) и (8.4.22) в пределе $\delta \to 0$.] Из (8.4.21) и (8.4.22) находим

$$E = \frac{1}{B(R)}\left(1 - \frac{RB'(R)}{2B(R)}\right), \tag{8.4.23}$$

$$J^2 = \frac{B'(R)\,R^3}{2B^2(R)}. \tag{8.4.24}$$

Подставляя (8.4.24) в (8.4.18), находим, что скорость вращения равняется

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{B'(R)}{2R}\right)^{1/2}, \tag{8.4.25}$$

в то время как (8.4.23) и (8.4.20) приводят к следующей формуле для собственного времени:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{B(R) - \frac{1}{2}RB'(R)}. \tag{8.4.26}$$

Используя разложение Робертсона (8.3.8), находим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{MG}{R^3}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{(\beta-\gamma)MG}{R} + \ldots\right], \tag{8.4.27}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[1 - \frac{3MG}{R} + \ldots\right]. \tag{8.4.28}$$

В большинстве приложений общей теории относительности наибольший интерес представляет для нас форма орбит, т. е. зависимость r от φ, а не их эволюция во времени. Форму орбит можно получить непосредственно, исключая dp из (8.4.11) и (8.4.13); это приводит к уравнению

$$\frac{A(r)}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{J^2B(r)}=-\frac{E}{J^2}. \tag{8.4.29}$$

Решение может быть найдено в квадратурах: 44

$$\varphi=\pm\int\frac{A^{1/2}(r)\,dr}{r^2\left(\frac{1}{J^2B(r)}-\frac{E}{J^2}-\frac{1}{r^2}\right)^{1/2}}. \tag{8.4.30}$$

§ 5. Неограниченные орбиты: отклонение света Солнцем

Рассмотрим частицу или фотон, прилетающий к Солнцу из очень удаленных областей (фиг. 8.1). На бесконечности метрика является метрикой Минковского, т. е. $A(\infty)=B(\infty)=1$, и частица должна двигаться с постоянной скоростью V, причем

$$b\approx r\sin(\varphi-\varphi_\infty)\approx r(\varphi-\varphi_\infty),$$

$$-V\approx\frac{d}{dt}(r\cos(\varphi-\varphi_\infty))\approx\frac{dr}{dt},$$

где b — «прицельный параметр», а φ_∞ — начальное направление. Подставляя эти выражения в (8.4.18) и (8.4.19), видим, что они действительно удовлетворяют уравнениям движения на бесконечности, где $A=B=1$, а константы движения равны

$$J=bV^2, \tag{8.5.1}$$

$$E=1-V^2. \tag{8.5.2}$$

(Фотон, конечно, имеет $V=1$, и, как мы уже видели, отсюда следует, что $E=0$.) Часто бывает более удобным выразить J через расстояние r_0 между Солнцем и ближайшей к нему точкой траектории, а не через прицельный параметр b. Для значения $r=r_0$ величина $dr/d\varphi$ исчезает, так что (8.4.29) и (8.5.2) дают

$$J=r_0\left(\frac{1}{B(r_0)}-1+V^2\right)^{1/2}. \tag{8.5.3}$$

Тогда формула (8.4.30) описывает орбиту следующим образом:

$$\varphi(r)=\varphi_\infty+\int_r^\infty\frac{A^{1/2}(r)\,dr}{r^2\left(\frac{1}{r_0^2}\left[\frac{1}{B(r)}-1+V^2\right]\left[\frac{1}{B(r_0)}-1+V^2\right]^{-1}-\frac{1}{r^2}\right)^{1/2}}. \tag{8.5.4}$$