

В большинстве приложений общей теории относительности наибольший интерес представляет для нас форма орбит, т. е. зависимость r от φ , а не их эволюция во времени. Форму орбит можно получить непосредственно, исключая dr из (8.4.11) и (8.4.13); это приводит к уравнению

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2}. \quad (8.4.29)$$

Решение может быть найдено в квадратурах: 44

$$\varphi = \pm \int \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}}. \quad (8.4.30)$$

§ 5. Неограниченные орбиты: отклонение света Солнцем

Рассмотрим частицу или фотон, прилетающий к Солнцу из очень удаленных областей (фиг. 8.1). На бесконечности метрика является метрикой Минковского, т. е. $A(\infty) = B(\infty) = 1$, и частица должна двигаться с постоянной скоростью V , причем

$$b \approx r \sin(\varphi - \varphi_\infty) \approx r(\varphi - \varphi_\infty),$$

$$-V \approx \frac{d}{dt}(r \cos(\varphi - \varphi_\infty)) \approx \frac{dr}{dt},$$

где b — «прицельный параметр», а φ_∞ — начальное направление. Подставляя эти выражения в (8.4.18) и (8.4.19), видим, что они действительно удовлетворяют уравнениям движения на бесконечности, где $A = B = 1$, а константы движения равны

$$J = bV^2, \quad (8.5.1)$$

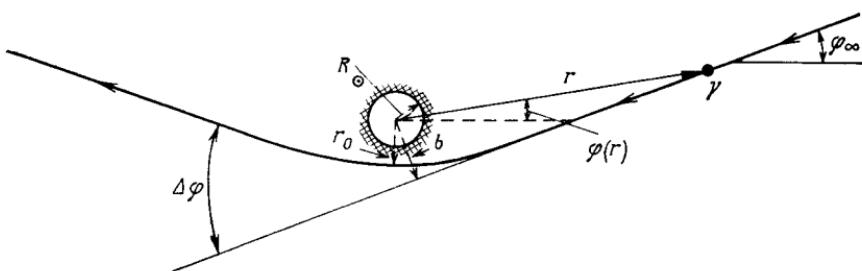
$$E = 1 - V^2. \quad (8.5.2)$$

(Фотон, конечно, имеет $V = 1$, и, как мы уже видели, отсюда следует, что $E = 0$.) Часто бывает более удобным выразить J через расстояние r_0 между Солнцем и ближайшей к нему точкой траектории, а не через прицельный параметр b . Для значения $r = r_0$ величина $dr/d\varphi$ исчезает, так что (8.4.29) и (8.5.2) дают

$$J = r_0 \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{1/2}. \quad (8.5.3)$$

Тогда формула (8.4.30) описывает орбиту следующим образом:

$$\varphi(r) = \varphi_\infty + \int_r^\infty \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left(\frac{1}{r_0^2} \left[\frac{1}{B(r)} - 1 + V^2 \right] \left[\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right]^{-1} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}}. \quad (8.5.4)$$



Фиг. 8.1. Величины, употребляемые при вычислении отклонения света гравитационным полем Солнца.

Величина отклонения сильно преувеличена.

Полное изменение φ , когда r убывает от бесконечности до его минимального значения r_0 , а затем опять уходит в бесконечность, как раз в два раза больше, чем изменение его в интервале от ∞ до r_0 , т. е. составляет $2 |\varphi(r_0) - \varphi_\infty|$. Если бы траектория была прямой линией, изменение как раз равнялось бы π ; следовательно, отклонение орбиты от прямой линии составляет

$$\Delta\varphi = 2 |\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi. \quad (8.5.5)$$

Когда эта величина положительна, угол φ изменяется более чем на 180° , т. е. траектория загибается к Солнцу; когда $\Delta\varphi$ отрицательно, траектория изгибаются в обратную сторону.

Для фотона $V^2 = 1$, и (8.5.4) принимает вид

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty A^{1/2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r}. \quad (8.5.6)$$

Если бы мы воспользовались точными значениями $A(r)$ и $B(r)$ из решений Шварцшильда (8.2.10) и (8.2.11), мы получили бы $\varphi(r)$ и $\Delta\varphi$ в виде эллиптических интегралов обычного типа, которые могут быть вычислены лишь численно с помощью разложения по малым параметрам MG/r_0 и MG/r . Однако и легче и поучительней провести разложения до интегрирования, находя $A(r)$ и $B(r)$ из разложений Робертсона (8.3.8) и (8.3.9):

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{MG}{r} + \dots,$$

$$B(r) = 1 - 2 \frac{MG}{r} + \dots.$$

Аргумент второго квадратного корня в выражении (8.5.6) тогда равен

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)}\right) - 1 &= \\ = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 + 2MG \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + \dots\right] - 1 &= \\ = \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] \left[1 - \frac{2MGr}{r_0(r+r_0)} + \dots\right], \end{aligned}$$

так что (8.5.6) принимает вид

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{dr}{r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} \left[1 + \frac{\gamma MG}{r} + \frac{MGr}{r_0(r+r_0)} + \dots \right].$$

Этот интеграл легко берется. В результате получаем

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi_\infty &= \arcsin \left(\frac{r_0}{r} \right) + \\ + \frac{MG}{r_0} \left(1 + \gamma - \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} - \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} \right) + \dots. \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

Следовательно, в первом порядке по MG/r_0 отклонение (8.5.5) определяется формулой

$$\Delta\varphi = \frac{4MG}{r_0} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right). \quad (8.5.8)$$

В этом порядке мы могли бы сразу заменить здесь r_0 прицельным параметром b .)

Если лучи света отклоняются Солнцем, мы должны подставить в полученную формулу $M = M_\odot = 1,97 \cdot 10^{33} g$, следовательно, $MG = M_\odot G = 1,475$ км, а вместо минимального значения r_0 — радиус Солнца $R_\odot = 6,95 \cdot 10^5$ км. Тогда (8.5.8) принимает вид

$$\Delta\varphi = \left(\frac{R_\odot}{r_0} \right) \theta_\odot, \quad (8.5.9)$$

где

$$\theta_\odot \equiv \frac{4M_\odot G}{R_\odot} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) = 1,75'' \left(\frac{1+\gamma}{2} \right). \quad (8.5.10)$$

Далее общая теория относительности дает $\gamma = 1$, а потому она предсказывает отклонение к Солнцу на угол $\theta_\odot = 1,75''$. (Юпитер отклоняет луч света только на $0,02''$, так что надежд наблюдать отклонение света каким-либо другим телом, кроме Солнца, мало.) В теории Бранса и Дикке выражения (8.5.10) и (8.3.3) приводят к следующему углу отклонения:

$$\theta_\odot = \frac{4M_\odot G}{R_\odot} \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4} \right). \quad (8.5.11)$$

Всякий раз, когда мы получаем предсказания на основе общей теории относительности, возникает (или должен возникать) вопрос: действительно ли полученный результат относится к реальному физическому измерению или в него привнесены произвольные субъективные элементы, зависящие от нашего выбора системы координат? В рассмотренном выше случае нам следует выяснить, каким должно быть предсказываемое изменение ϕ , т. е. действительное смещение изображений звезд на фотопластинках. К счастью, ответить на этот вопрос достаточно просто, так как мы имеем здесь дело с экспериментом по рассеянию. Лучи света приходят из очень удаленных областей, отклоняются, когда приближаются к Солнцу, и затем детектируются на Земле, пройдя путь более чем в 200 радиусов Солнца. В точках испускания и наблюдения метрику можно считать метрикой Минковского, и в этих областях не возникает никаких вопросов о смысле ϕ ; это азимутальный угол в системе координат, в которой световые лучи движутся в основном по прямым. Поэтому мы можем связать $\Delta\phi$ со сдвигом изображений звезд на фотопластинках с помощью обычных законов геометрической оптики. (Мы пренебрегаем здесь эффектами гравитационного поля самой Земли, поскольку это поле у ее поверхности более чем в 10^3 раз слабее, чем поле Солнца у его поверхности.) Однако нам следует быть намного осторожнее в отношении смысла нашего ϕ , если предсказывать отклонение света Солнцем, проводя наблюдения, например, на спутнике, движущемся вокруг Солнца по орбите, удаленной от него всего на несколько солнечных радиусов.

Другая трудность, которая возникает здесь, связана с рассмотрением фотона как кванта света, движущегося подобно любой другой частице, имеющей скорость, близкую к единице, т. е. к с. Действительно, квантовой механике не удалено никакого внимания. Длина волны света настолько мала по сравнению с масштабом гравитационного поля Солнца (примерно 10^{-5} см по сравнению с 10^{10} см), что в любой точке этого поля можно построить локально-инерциальную систему координат, которая охватывает огромное число длин волн, скажем 10^{15} . Принцип эквивалентности утверждает, что в такой системе координат свет ведет себя, как в свободном от гравитации пустом пространстве, а так как длина волны света очень мала, то это означает, что можно пренебречь дифракцией и каждый элемент фронта волны движется по прямой линии с единичной скоростью. Это утверждение, записанное в неинерциальной астрономической системе координат, есть не что иное, как наше уравнение движения (8.4.2). (Этот аргумент, кстати, поясняет, почему отклонение света не может зависеть от поляризации.)

Теперь посмотрим, как сравнивать эйнштейновское предсказание (8.5.9) с результатами наблюдений. Угол отклонения $\Delta\varphi$ измеряется классическим способом: сопоставлением видимых положений звезд вблизи солнечного диска во время затмения, когда их свет проходит у края Солнца, с их положениями ночью за шесть месяцев до момента затмения, когда эти звезды видимы на небе с Земли на противоположной стороне от Солнца, так что их свет не проходит около Солнца на пути к нам. Вычитая φ , соответствующее ночных наблюдениям, из φ , измеренного во время затмения, мы в принципе могли бы получить $\Delta\varphi$. Однако имеются неизбежные изменения в масштабах фотоснимков за шестимесячный срок отчасти из-за малых колебаний температур, отчасти из-за механических изменений геометрии системы телескоп — камера за столь продолжительный срок. Изменение масштаба фотоснимка приводило бы к мнимому отклонению положения звезды к Солнцу или от него на угол, пропорциональный расстоянию r_0 , на котором ее свет проходит около Солнца. Поэтому на практике, наблюдения надо сравнивать с теоретической кривой

$$\Delta\varphi = \theta_{\odot} \frac{R_{\odot}}{r_0} + S \frac{r_0}{R_{\odot}}, \quad (8.5.12)$$

где S — неизвестная масштабная постоянная (часто обозначаемая α), а θ_{\odot} — угол, который следует сравнивать с теоретическим значением $1,75''$. Имеются другие эффекты, которые могут давать вклады в $\Delta\varphi$, такие, как рефракция света звезд на солнечной короне, или эффекты, создаваемые более холодным воздухом в лунной тени, но все же кажется, что ни один из них не играет важной роли. Наблюдения не могут быть выполнены для света, проходящего около солнечного диска на расстоянии, меньшем $r_0 \approx 2R_{\odot}$. Однако такие наблюдения все же полезны для определения $\Delta\varphi$ сопоставлением наблюданного значения $\Delta\varphi$ и теоретической кривой (8.5.12). Трудность такой программы состоит на самом деле в том, что измерить $\Delta\varphi$ точно за краткое время затмения нелегко. В 1919 г. экспедиция по изучению затмения была послана на два маленьких острова, Собран у северо-восточного побережья Бразилии и Принсиши в Гвинейском заливе. Было изучено около дюжины звезд, которые дали для θ значения [3] $1,98 \pm 0,12''$ и $1,61 \pm 0,31''$ в хорошем согласии с эйнштейновским предсказанием $\theta_{\odot} = 1,75''$. Вероятно, именно этот потрясающий результат, больше чем что-либо другое, привлек внимание широкой публики к общей теории относительности в 20-х годах нашего века.

С 1919 г. были проведены измерения положений около 380 звезд во время затмений 1922, 1929, 1936, 1947 и 1952 гг., результаты которых приводятся в табл. 8.1 (взятой из сводки данных

Таблица 8.1

Измерения величин отклонения света Солнцем [4—7]

В четвертом столбце—минимальные и максимальные значения расстояний, на которые световые лучи от изученных звезд приближаются к центру Солнца. В пятом столбце приведены окончательные значения отклонений тех световых лучей, которые касаются солнечного диска.

Дата затмения	Место наблюдения	Число звезд	r_0/R_\odot	θ_\odot , угловые секунды	Литература
29 мая 1919 г.	Собрал	7	2—6	$1,98 \pm 0,16$	[3]
	Принсили	5	2—6	$1,61 \pm 0,40$	[3]
21 сентября 1922 г.	Австралия	11—14	2—10	$1,77 \pm 0,40$	[34]
	»	18	2—10	от 1,42 до 2,16	[35]
	»	62—85	2,1—14,5	$1,72 \pm 0,15$	[36]
	»	145	2,1—42	$1,82 \pm 0,20$	[37]
9 мая 1929 г.	Суматра	17—18	1,5—7,5	$2,24 \pm 0,10$	[38]
19 июня 1936 г.	СССР	16—29	2—7,2	$2,73 \pm 0,31$	[39]
	Япония	8	4,7	от 1,28 до 2,13	[40]
20 мая 1947 г.	Бразилия	51	3,3—10,2	$2,01 \pm 0,27$	[41]
25 февраля 1952 г.	Судан	9—11	2,1—8,6	$1,70 \pm 0,10$	[42]

фон Клюбера [4¹]). Значения, полученные для θ_\odot , изменяются от $1,3''$ до $2,7''$, но в основном попадают в интервал от $1,7''$ до $2''$. Самые последние результаты дают $\Delta\phi = 1,70 \pm 0,10''$ и находятся в согласии с предсказанием Эйнштейна. Не ясно, однако, действительно ли систематическая ошибка здесь меньше, чем в предыдущих наблюдениях. Из всего этого мы можем сделать вывод, что определенно имеется отклонение света, большее чем $\theta_\odot = 0,875''$, которое предсказывается при $\gamma = 0$ [т. е. при $A(r) = 1$], однако о точном значении мы можем сказать лишь то, что θ_\odot лежит где-то между $1,6''$ и $2,2''$, т. е. значение γ лежит между $0,9''$ и $1,3''$. Имеется возможность улучшить точность этих измерений в ближайшем будущем, когда будет использоваться фотоэлектрическая аппаратура, следящая за положением звезд, независимо от затмений.

Последние достижения радиоастрономии [8] позволяют измерять отклонения радиосигналов Солнцем в принципе с гораздо большей точностью, чем точность измерений в оптической астрономии. Точность угловых измерений в оптическом диапазоне ограничена неоднородностями земной атмосферы и равна приблизительно $0,1''$, в то время как радиointерферометр, работающий на длине волн λ и имеющий базис D , позволяет в принципе измерять углы с точностью порядка $\lambda/2\pi D$ рад. Это составляет уже $0,1''$ при $\lambda = 3$ см и $D = 10$ км и пропорционально меньше для больших базисов.

¹⁾ Некоторые из этих данных вновь проанализированы в работе [5]; см. также [6, 7].

Одно осложнение доставляет астрономам большие хлопоты на радиочастотах, чем в оптическом диапазоне: это рефракция лучей на солнечной короне. Для частот X -полосы (8000—12500 МГц) рефракция очень мала и может быть исключена обрезанием данных, связанных с радиосигналами, проходящими на расстояниях, меньших чем $2R_{\odot}$ от диска Солнца. Однако в S -полосе частот (2000—4000 МГц) надо анализировать данные с помощью модели, в которой часть отклонения объясняется общей теорией относительности, а часть — эффектом короны. Параметры, описывающие солнечную корону, могут быть в принципе измерены этим методом (на нескольких частотах) одновременно с измерением ОТО-эффекта, но плотность электронов в короне изменяется во времени и оказывается, что единственный действительно удовлетворительный метод учета рефракции на короне — это использование радиочастот X -полосы и выше.

В октябре каждого года происходит затмение квазара ЗС279 Солнцем и несколько радиоастрономических групп пользуются этим удобным случаем, чтобы наблюдать изменение угла (около $9,5^{\circ}$) между квазарами ЗС279 и ЗС273 в интервале времени как раз перед и как раз после затмения. Эти результаты приведены в табл. 8.2. Снова видим, что общая теория относительности

Таблица 8.2

Интерферометрические измерения величин отклонения Солнцем радиоволн, приходящих от источника ЗС279

Данные выражены через угол отклонения θ_{\odot} , соответствующий радиосигналу, который касается солнечного диска.

Аппаратура	Радарные частоты, МГц	Базис, км	Время затмения	θ_{\odot} , угловые секунды	Литература
Оуэнс-Вэлли	9602	1,0662	30.9.1969—15.10.1969	$1,77 \pm 0,20$	[43]
Голдстоун	2388	21,566	2.10.1969—10.10.1969	$1,82^{+0,24}_{-0,17}$	[44]
»	7840	3899,92	30.9.1969—15.10.1969	$1,80 \pm 0,2$	[45]
Грин-Бэнк	2695 и 8085	2,7	2.10.1970—12.10.1970	$1,57 \pm 0,08$	[46]
	2697 и 4993,8	1,41	8.10.1970	$1,87 \pm 0,3$	[47]

подтверждается, но достигнутая точность все еще недостаточна, чтобы сделать выбор между теориями Эйнштейна и Бранса — Дикке. Однако данные, полученные на интерферометрах с очень большими базисами (например, «Голдстоун», имеющий базис 3900 км), дают в принципе достаточно информации для измерения углового положения с точностью около $0,001''$. Можно надеяться, что анализ этих данных позволит наконец действительно точно определить γ .