

## § 6. Замкнутые орбиты: смещение перигелия

Рассмотрим теперь пробную частицу, которая движется по околосолнечной орбите (фиг. 8.2). В перигелии и афелии  $r$  достигает своего минимального и максимального значения  $r_-$  и  $r_+$  и в обеих точках равно нулю  $dr/d\phi$ , так что (8.4.29) дает

$$\frac{1}{r_{\pm}^2} - \frac{1}{J^2 B(r_{\pm})} = -\frac{E}{J^2}.$$

Из этих двух уравнений можно вывести величины двух интегралов движения

$$E = \frac{\frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)}}{\frac{r_+^2 - r_-^2}{B(r_+) - B(r_-)}}, \quad (8.6.1)$$

$$J^2 = \frac{\frac{1}{B(r_+)} - \frac{1}{B(r_-)}}{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}}. \quad (8.6.2)$$

Угол, на который поворачивается вектор положения  $r$  от начального направления  $r_-$ , задается уравнением (8.4.30) в виде

$$\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int_{r_-}^r A^{1/2}(r) \left[ \frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2}.$$

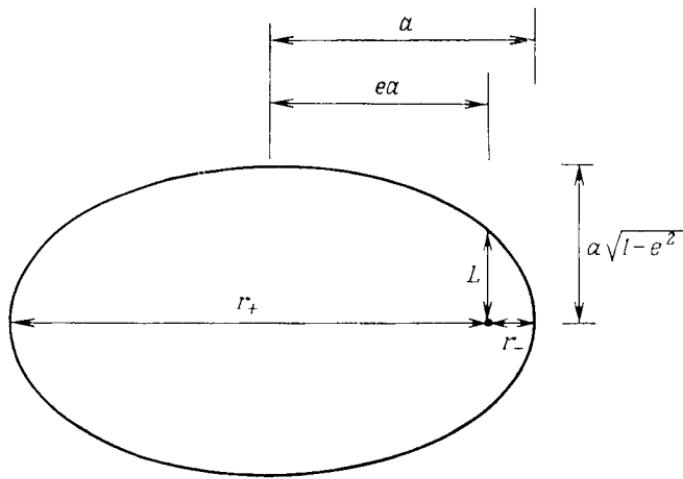
Используя (8.6.1) и (8.6.2), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(r_-) &= \int_{-r}^r \left[ \frac{\frac{r_-^2(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)) - r_+^2(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))} - \frac{1}{r^2}}{A^{1/2}(r) r^{-2}} \right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times A^{1/2}(r) r^{-2} dr. \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

Изменение  $\varphi$  при уменьшении  $r$  от  $r_+$  до  $r_-$  то же, что и при возрастании  $r$  от  $r_-$  к  $r_+$ , поэтому общее изменение угла  $\varphi$  при полном обороте равно  $2 |\varphi(r_+) - \varphi(r_-)|$ . Если орбита представляла бы собой замкнутый эллипс, эта величина равнялась бы  $2\pi$ , поэтому в общем случае при каждом повороте орбита прецессирует на угол, равный

$$\Delta\varphi = 2 |\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi. \quad (8.6.4)$$

Если подставить точные значения  $A(r)$  и  $B(r)$ , даваемые решением Шварцшильда (8.2.10) и (8.2.11), в выражение (8.6.3), получим формулы для  $\varphi(r)$  и  $\Delta\varphi$  в виде эллиптических интегралов. Для того чтобы вычислить их численно, следовало бы разложить эти интегралы по степеням величин  $MG/r$  и  $MG/r_{\pm}$ .



Фиг. 8.2. Элементы эллипса, используемые при вычислении прецессии планетарных орбит.

Эллипс имеет здесь тот же эксцентриситет, что и орбита Икаруса.

Вместо этого мы разложим подынтегральное выражение, используя разложения Робертсона (8.3.8) и (8.3.9) для  $A(r)$  и  $B(r)$ :

$$\begin{aligned} A(r) &= 1 + 2\gamma \frac{MG}{r} + \dots, \\ B(r) &= 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{2(\beta - \gamma) M^2 G^2}{r^2} + \dots \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

Отметим, что в выражении (8.6.3) полностью сокращаются главные члены в  $B(r)$ , но не в  $A(r)$ . Поэтому, чтобы вычислить  $\phi$  и  $\Delta\phi$  в первом порядке по  $Mg/r_{\pm}$ , необходимо в  $B(r)$  учесть члены второго порядка по  $MG/r$ , в то время как в  $A(r)$  можно ограничиться членами только первого порядка.

Дальнейшие вычисления сильно облегчаются, если заметить, что разложение

$$B^{-1}(r) \approx 1 + \frac{2MG}{r} + \frac{2(2-\beta+\gamma) M^2 G^2}{r^2}$$

делает подкоренное выражение первого квадратного корня в (8.6.3) квадратичной функцией от  $1/r$ . Кроме того, это выражение обращается в нуль при  $r = r_{\pm}$ , а потому

$$\begin{aligned} \frac{r_-^2 (B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)) - r_+^2 (B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))} - \\ - \frac{1}{r^2} = C \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right), \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Постоянную  $C$  здесь можно определить, если устремить  $r$  к бесконечности:

$$C = \frac{r_{+}^2 (1 - B^{-1}(r_{+})) - r_{-}^2 (1 - B^{-1}(r_{-}))}{r_{+}r_{-}(B^{-1}(r_{+}) - B^{-1}(r_{-}))}.$$

Умножая далее числитель и знаменатель на  $2(r_{-} - r_{+})/MG$ , получаем

$$C \approx 1 - (2 - \beta + \gamma) MG \left( \frac{1}{r_{+}} + \frac{1}{r_{-}} \right). \quad (8.6.7)$$

Подстановка (8.6.5) — (8.6.7) в (8.6.3) дает

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(r_{-}) \approx & \left[ 1 + \frac{1}{2} (2 - \beta + \gamma) MG \left( \frac{1}{r_{+}} + \frac{1}{r_{-}} \right) \right] \times \\ & \times \int_{-r}^{r} \frac{\left[ 1 + \frac{\gamma MG}{r} \right] dr}{r^2 \left[ \left( \frac{1}{r_{-}} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{+}} \right) \right]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Если ввести новую переменную  $\psi$  с помощью соотношения

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{+}} + \frac{1}{r_{-}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{+}} - \frac{1}{r_{-}} \right) \sin \psi, \quad (8.6.8)$$

то интеграл становится тривиальным. Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(r_{-}) = & \left[ 1 + \frac{1}{2} (2 - \beta + 2\gamma) MG \left( \frac{1}{r_{+}} + \frac{1}{r_{-}} \right) \right] \left[ \psi + \frac{\pi}{2} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \gamma MG \left( \frac{1}{r_{+}} - \frac{1}{r_{-}} \right) \cos \psi. \quad (8.6.9) \end{aligned}$$

В афелии  $\psi$  равно  $\pi/2$ , так что (8.6.4) и (8.6.9) дают следующую прецессию при одном обороте (в единицах рад/об):

$$\Delta\varphi = \left( \frac{6\pi MG}{L} \right) \left( \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \right), \quad (8.6.10)$$

где  $L$  — характеристика эллипса, называемая *фокальным параметром*:

$$\frac{1}{L} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{+}} + \frac{1}{r_{-}} \right).$$

Элементы планетарных орбит — большую ось  $a$  и эксцентриситет  $e$ , определяемые следующим образом:

$$r_{\pm} = (1 \pm e) a,$$

находят обычно из таблиц. Следовательно, используя формулу

$$L = (1 - e^2) a,$$

можно, зная  $a$  и  $e$ , определить  $L$ . Уравнения поля Эйнштейна дают  $\beta = \gamma = 1$ , что предсказывает следующую прецессию (в еди-

ницах рад/об):

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{MG}{L}. \quad (8.6.11)$$

Величина  $\Delta\varphi$  положительная, и это означает, что в целом орбита прецессирует в том же направлении, в котором движется пробная частица. В теории Бранса — Дикке соотношения (8.6.10) и (8.3.3) дают

$$\Delta\varphi = \left( \frac{6\pi MG}{L} \right) \left( \frac{3\omega + 4}{3\omega + 6} \right). \quad (8.6.12)$$

Здесь нам снова следует задаться вопросом: что же означает это предсказываемое значение  $\Delta\varphi$ ? Рассматриваемый случай не является экспериментом по рассеянию, подобно отклонению света Солнцем; здесь мы имеем дело с объектом, который никогда не уходит на бесконечность, где пространство-время описывается метрикой Минковского. При любом наблюдении за движением пробной частицы с помощью оптических приборов или радиорадиоволн астрономы используют световые лучи, которые сами находятся под воздействием гравитационного поля, и если не внести поправки на отклонение света, то для любого заданного радиуса  $r$  наблюдаемая астрономом величина  $\varphi(r)$  будет содержать ошибку порядка  $MG/L$  [см. выражение (8.5.8)]. Однако на практике эти тонкости не играют существенной роли, так как прецессия — величина кумулятивная. Из выражения (8.6.10) видно, что после  $N$  оборотов перигелий сместится на угол порядка  $NMG/L$ . Поэтому если  $N \gg 1$ , то нет необходимости учитывать в  $\varphi$  ошибки порядка  $MG/L$ . Действительно, выражение (8.6.11) утверждает, что после  $L/3MG \gg 1$  оборотов перигелий вернется к своему первоначальному азимуту — предсказание, которое совершенно не связано с тем, как мы определяем  $r$  или  $\varphi$ .

Для Меркурия следует принять  $L = 55,3 \cdot 10^6$  км,  $MG = 1,475$  км, и тогда выражение (8.6.11) дает величину  $\Delta\varphi = 0,1038''$  за оборот. За столетие Меркурий совершает 415 оборотов, и общая теория относительности предсказывает

$$\Delta\varphi = 43,03'' \text{ за столетие} (\S).$$

К счастью, существуют точные наблюдения за Меркурием, восходящие еще к 1765 г. Эти данные были вновь проанализированы Клеменсом [9, 10] в 1943 г. Он нашел, что за столетие набегает величина  $\Delta\varphi = 43,11 \pm 0,45''$ , что хорошо согласуется с данными, полученными ранее Ньюкомом (§ 2 гл. 1), и находится в блестящем соответствии с общей теорией относительности. Принимая это значение, найдем поправочный коэффициент в выражении (8.6.10):

$$\left( \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \right) = 1,00 \pm 0,01.$$

Это — наиболее важное из подтверждений общей теории относительности, во-первых, благодаря высокой его точности, а во-вторых, потому что это единственная величина, чувствительная к коэффициенту  $\beta$  в членах второго порядка в  $g_{tt}$ .

Данные [10—17] для Венеры, Земли, Икаруса вместе с данными для Меркурия сведены в табл. 8.3. Очевидно, что точность,

Таблица 8.3

**Сравнение теоретических и наблюдаемых значений прецессии планетарных орбит за столетие [10—15]**

| Планета  | $(10^6 \text{ км})$ | $e$    | $\frac{6\pi MG}{L}$ | Число оборотов за столетие | $\Delta\phi (^{/столетие})$ |                  |
|----------|---------------------|--------|---------------------|----------------------------|-----------------------------|------------------|
|          |                     |        |                     |                            | ОТО                         | наблюдение       |
| Меркурий | 57,91               | 0,2056 | 0,1038"             | 415                        | 43,03                       | $43,11 \pm 0,45$ |
| Венера   | 108,21              | 0,0068 | 0,058"              | 149                        | 8,6                         | $8,4 \pm 4,8$    |
| Земля    | 149,60              | 0,0167 | 0,038"              | 100                        | 3,8                         | $5,0 \pm 1,2$    |
| Икарус   | 161,0               | 0,827  | 0,115"              | 89                         | 10,3                        | $9,8 \pm 0,8$    |

с которой можно изучать планеты, сильно понижается по мере удаления планеты от Солнца. Это происходит по двум причинам: во-первых, потому что уменьшение эксцентриситета делает наблюдения за перигелием менее надежными, и, во-вторых, поскольку  $L$  возрастает, величина прецессии за оборот и число оборотов за столетие уменьшаются. Икарус (астероид) был обнаружен только в 1949 г., но в некотором отношении это наиболее подходящий объект для изучения, поскольку он имеет малые размеры, подходит близко к Земле, а большой эксцентриситет его орбиты позволяет определять прецессию с большой точностью. Вносилось также предложение поместить на вытянутую орбиту, расположенную близко к Солнцу, искусственный спутник. При этом спутник с параметром орбиты  $L$ , скажем, равным  $10R_\odot$ , за столетие прецессировал бы на угол  $8250''$ . Трудность здесь состоит в том, что столь малый объект подвергался бы действию негравитационных возмущений, таких, как радиационное давление, солнечный ветер, микрометеориты, влиянием которых на Меркурий и Икарус можно, конечно, пренебречь.

Существуют два обстоятельства, которые необходимо помнить, оценивая согласие наблюдаемого смещения перигелия с предсказанием общей теории относительности.

Прежде всего известно множество возмущений, которые вносят вклад в прецессию планетарных орбит. В частности, теория Нью-

тона дает следующее значение прецессии для Меркурия:

$$\Delta\varphi_N = 5557,62 \pm 0,20'' (\textcircled{S}).$$

Однако около  $5025''$  из этой величины обусловлены вращением астрономической системы координат, связанной с Землей, а примерно  $532''$  связаны с гравитационными возмущениями. При этом последняя величина находится в ньютоновской теории возмущений из расчетов движения других планет, в основном Венеры, Земли и Юпитера. В действительности же наблюдаемая прецессия равна

$$\Delta\varphi_{\text{nабл}} = 5600,73 \pm 0,41'' (\textcircled{S}),$$

и величину  $\Delta\varphi = 43,11 \pm 0,45''$ , названную выше «наблюдаемой» аномальной прецессией, можно получить, вычитая ньютоновскую прецессию из действительно наблюдаемой, т. е.

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\text{nабл}} - \Delta\varphi_{\text{н}}. \quad (8.6.13)$$

Можно поставить вопрос: та ли это величина, что следует сравнивать с предсказанием общей теории относительности,  $43,03''$  за столетие, т. е. как узнать, будет ли правильным определять полную прецессию следующим образом: к ньютоновской величине  $\Delta\varphi_{\text{н}}$ , вычисленной без учета эффектов общей теории относительности, прибавлять эйнштейновскую величину  $\Delta\varphi_{\text{фото}}$ , вычисленную в пренебрежении всеми эффектами планетарных возмущений? В какой-то мере на этот вопрос можно ответить, вспоминая о том, что общерелятивистские поправки к  $\Delta\varphi_{\text{н}}$  должны иметь порядок  $MG/L \cdot \Delta\varphi_{\text{н}}$  или около  $10^{-4}''$  за столетие. Для более полного ответа необходимо обсудить постニュтоновское приближение, что и будет сделано в следующей главе. Но если даже допустить, что (8.6.13) в принципе верно, необходимо сознавать, что даже очень малая систематическая ошибка в  $\Delta\varphi_{\text{н}}$  либо в  $\Delta\varphi_{\text{nабл}}$  может полностью нарушить согласие между теорией и наблюдением.

Другая опасность связана с тем, что очень малые *неизвестные* нам сейчас эффекты могут давать в наблюдаемую прецессию перигелия вклад, сравнимый по величине с предсказанием общей теории относительности. Действительно, в гл. 1 мы упоминали о том, что Ньюком вынужден был в 1911 г. отказаться от своего предложения ввести отклонения от закона обратных квадратов, поскольку наблюдаемую аномальную прецессию в  $43''$  за столетие можно было объяснить в рамках ньютоновской механики как величину, связанную с гравитационным полем, создаваемым веществом, вызывающим явление «зодиакального света». (Сегодня мы знаем, что между Меркурием и Солнцем нет достаточного количества вещества, которое могло бы вызвать сколько-нибудь заметную прецессию.)

Возможно также, что Солнце слегка сплюснуто [16, 17] и в этом случае его ньютоновский потенциал содержит член  $r^{-3}$ , приводящий при обращении планет к аномальной прецессии, величина которой убывает как обратный квадрат расстояния планеты от Солнца. Табл. 8.2 показывает, что в действительности в соответствии с общей теорией относительности наблюдаемая аномальная прецессия, возникающая при обращении, убывает приближенно как  $1/r$ , а не как  $1/r^2$ . Еще важнее то, что большая сплюснутость Солнца вызывала бы аномальную прецессию плоскостей орбит внутренних планет [18], которая не наблюдается. В совокупности эти два обстоятельства исключают возможность объяснения всей величины наблюдаемой аномальной прецессии за счет сплюснутости Солнца; за счет нее можно отнести не более 20% наблюдаемого эффекта. Чтобы проверить эту гипотезу, Дикке и Голденберг [19] сканировали солнечный диск фотоэлектрически в течение периода с 1 июня по 23 сентября 1966 г. Они пришли к выводу, что полярный диаметр Солнца короче экваториального диаметра с относительной разностью  $(5,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$ . Если явно учесть эту величину, то возникает дополнительная прецессия перигелия Меркурия, равная  $3,4''$  за столетие. Поэтому лишь прецессия, равная  $39,6''$  за столетие, может обусловливаться релятивистскими эффектами, так что возникает расхождение в 8% с предсказанием Эйнштейна:  $43,03''$  за столетие. Теория Бранса — Дикке может объяснить прецессию  $39,6''$  за столетие, если в ней положить  $\omega = 6,4$ . Однако существует несколько причин, которые не позволяют сразу отказаться от общей теории относительности.

А. Чтобы возникла сплюснутость Солнца, внутренняя часть Солнца должна совершать полный оборот вокруг собственной оси за один или два дня, т. е. намного быстрее, чем наблюдаемая скорость вращения поверхности Солнца (оборот за 25 дней). Такое различие в скоростях вращения, по-видимому, можно было бы связать [20] с наличием магнитного вращающего момента, возникающего из-за солнечного ветра и замедляющего вращение поверхности, однако не ясно, обладает ли такая конфигурация динамической устойчивостью [21, 22].

Б. В период с 1891 по 1902 г. на Геттингенском гелиометре были проведены две серии прецизионных измерений [23], которые дали значения относительной разности экваториального и полярного диаметров Солнца  $(0,36 \pm 0,78) \cdot 10^{-5}$  и  $(-0,10 \pm 0,47) \cdot 10^{-5}$  соответственно. Эти результаты согласуются друг с другом и указывают на идеальную сферичность, однако расходятся с результатом Дикке и Голденберга  $(5,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$ . Геттингенские результаты были подтверждены последующими гелиометрическими измерениями.

Процитируем Ашбрука [23]:

«Что нам со всем этим делать? Может ли с учетом астрономических данных полярный диаметр Солнца быть на 0,1 угловой секунды короче экваториального, как утверждают Дикке и Голденберг? Была ли в Принстонском эксперименте какая-нибудь тонкая систематическая ошибка? Или же во всей серии гелиометрических измерений проявился какой-то незамеченный эффект?»

Чтобы правильно судить об опытах Дикке и Голденберга, следует заметить, что ось сплющенного эллипсоида, который они наблюдали, следует за осью вращения Солнца в ее изменяющемся на протяжении года положении. Это говорит о том, что Дикке и Голденберг наблюдали нечто реальное.

В. Даже если исходить из того, что визуально поверхность Солнца сплюснута, то что можно при этом утверждать о форме массового распределения и о гравитационном поле Солнца? Дикке [16] утверждает, что видимая поверхность Солнца совпадает с эквипотенциальной гравитационной поверхностью, но этот вывод опирается в значительной степени на астрофизическую теорию и поэтому может быть ошибочным.

Г. Наконец, если Дикке и Голденберг правы, то соответствие между предсказанием Эйнштейна и наблюданной аномальной прецессией (в пределах 1%) есть просто совпадение.

## § 7. Запаздывание радарного эха

Классическая проверка общей теории относительности, рассмотренная нами в предыдущих параграфах, определялась только видом траекторий фотонов и планет. Развитие в последние годы быстродействующей электроники и мощных средств радиолокации дало возможность измерять движение в зависимости от времени с той степенью точности, которая необходима для проверки уравнений Эйнштейна. В частности, Шапиро [24] предложил эксперимент и провел его совместно с группой Линкольновской лаборатории, измерив [25, 26] время, которое необходимо радарному сигналу, чтобы достичь планеты, расположенной на внутренней орбите, и, отразившись, вернуться обратно на Землю.

Чтобы понять смысл этих измерений, вычислим прежде всего время, затрачиваемое радиолокационным сигналом на прохождение от одной точки с координатами  $r = r_1$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = \varphi_1$  до другой с координатами  $r = r_2$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = \varphi_2$ . Уравнение (8.4.19), определяющее эволюцию орбиты во времени, выглядит следующим образом:

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E.$$