

Процитируем Ашбрука [23]:

«Что нам со всем этим делать? Может ли с учетом астрономических данных полярный диаметр Солнца быть на 0,1 угловой секунды короче экваториального, как утверждают Дикке и Голденберг? Была ли в Принстонском эксперименте какая-нибудь тонкая систематическая ошибка? Или же во всей серии гелиометрических измерений проявился какой-то незамеченный эффект?»

Чтобы правильно судить об опытах Дикке и Голденберга, следует заметить, что ось сплющенного эллипсоида, который они наблюдали, следует за осью вращения Солнца в ее изменяющемся на протяжении года положении. Это говорит о том, что Дикке и Голденберг наблюдали нечто реальное.

В. Даже если исходить из того, что визуально поверхность Солнца сплюснута, то что можно при этом утверждать о форме массового распределения и о гравитационном поле Солнца? Дикке [16] утверждает, что видимая поверхность Солнца совпадает с эквипотенциальной гравитационной поверхностью, но этот вывод опирается в значительной степени на астрофизическую теорию и поэтому может быть ошибочным.

Г. Наконец, если Дикке и Голденберг правы, то соответствие между предсказанием Эйнштейна и наблюдаемой аномальной прецессией (в пределах 1%) есть просто совпадение.

§ 7. Запаздывание радарного эха

Классическая проверка общей теории относительности, рассмотренная нами в предыдущих параграфах, определялась только видом траекторий фотонов и планет. Развитие в последние годы быстродействующей электроники и мощных средств радиолокации дало возможность измерять движение в зависимости от *времени* с той степенью точности, которая необходима для проверки уравнений Эйнштейна. В частности, Шапиро [24] предложил эксперимент и провел его совместно с группой Линкольновской лаборатории, измерив [25, 26] время, которое необходимо радарному сигналу, чтобы достичь планеты, расположенной на внутренней орбите, и, отразившись, вернуться обратно на Землю.

Чтобы понять смысл этих измерений, вычислим прежде всего время, затрачиваемое радиолокационным сигналом на прохождение от одной точки с координатами $r = r_1$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \varphi_1$ до другой с координатами $r = r_2$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \varphi_2$. Уравнение (8.4.19), определяющее эволюцию орбиты во времени, выглядит следующим образом:

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E.$$

Поскольку мы имеем дело со световыми лучами, то $E = 0$. Более того, $(dr/dt)^2$ должно обращаться в нуль в точке максимального сближения с Солнцем $r = r_0$, поэтому

$$J^2 = \frac{r_0^2}{B(r_0)}.$$

Тогда уравнение движения фотона имеет вид

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 B^{-1}(r_0) - B^{-1}(r) = 0. \quad (8.7.1)$$

Из этого уравнения находим время, необходимое свету для прохождения пути от r_0 до r или от r до r_0 :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \left(\frac{A(r)/B(r)}{\left[1 - \frac{B(r)}{B(r_0)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right]} \right)^{1/2} dr, \quad (8.7.2)$$

а потому полное время, которое будет затрачено, чтобы пройти от точки 1 к точке 2, равно (для $|\Phi_1 - \Phi_2| > \pi/2$)

$$t_{12} = t(r_1, r_0) + t(r_2, r_0). \quad (8.7.3)$$

Чтобы вычислить интеграл (8.7.2), необходимо снова применить к подынтегральному выражению разложение Робертсона, о котором говорилось в § 3 этой главы, а именно

$$A(r) \approx 1 + \frac{2\gamma MG}{r}, \quad B(r) \approx 1 - \frac{2MG}{r}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} 1 - \frac{B(r)}{B(r_0)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 &\approx 1 - \left[1 + 2MG \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \approx \\ &\approx \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[1 - \frac{2MG r_0}{r(r+r_0)} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому в первом порядке по MG/r и MG/r_0 (8.7.2) сводится к

$$t(r, r_0) \approx \int_{r_0}^r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2} \left[1 + \frac{(1+\gamma)MG}{r} + \frac{MG r_0}{r(r+r_0)} \right] dr.$$

Интеграл стал табличным, и можно найти время прохождения светом расстояния от r_0 до r :

$$\begin{aligned} t(r, r_0) &\approx \sqrt{r^2 - r_0^2} + (1+\gamma)MG \times \\ &\times \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} \right) + MG \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.7.4)$$

Основной член $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ — это то, чего следовало ожидать, если бы свет распространялся с единичной скоростью по прямым линиям. Очевидно, что другие члены отражают дополнительное

гравитационное запаздывание во времени, которое возникнет, пока радиосигнал дойдет до Меркурия и обратно. (Обратим внимание на то, что это запаздывание прямо противоположно тому, которое следует из аналогии со случаем медленно движущегося тела, скажем, кометы.) Это дополнительное запаздывание максимально, когда Меркурий находится в верхнем соединении и радиолокационный сигнал касается Солнца. В этом случае расстояние r_0 примерно равно радиусу Солнца, $r_0 \approx R_\odot$, и много меньше, чем расстояния от Земли r_\oplus и от Меркурия r до Солнца. Поэтому дополнительное максимальное время запаздывания при движении луча туда и обратно задается с помощью соотношений (8.7.3) и (8.7.4) в виде

$$\begin{aligned} (\Delta t)_{\text{макс}} &\equiv 2[t(r_\oplus, R_\odot) + t(r_\oplus, R_\odot) - \sqrt{r_\oplus^2 - R_\odot^2} - \sqrt{r_\oplus^2 - R_\odot^2}] \approx \\ &\approx 4M_\odot G \left\{ 1 + \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \ln \left(\frac{4r_\oplus r_\oplus}{R_\odot^2} \right) \right\} \approx \\ &\approx 5,9 \text{ км} \left\{ 1 + 11,2 \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.7.5)$$

Если уравнения поля Эйнштейна верны, то $\gamma = 1$ и дополнительное максимальное запаздывание

$$(\Delta t)_{\text{макс}} \approx 72 \text{ км} = 240 \text{ мкс}. \quad (8.7.6)$$

Не представляет никакой сложности отсчитать с точностью до микросекунд время порядка 20 мин, затрачиваемое радиосигналом на прохождение до Меркурия и обратно. Тем не менее при разборе и интерпретации такого эксперимента возникают чрезвычайно большие трудности.

Одна из трудностей заключается в том, что радиолокационный сигнал отражается не от одной «зеркальной точки» поверхности Меркурия, а от площадки вполне определенного размера, а потому момент прибытия сигнала известен с точностью до нескольких сотен микросекунд из-за его размазывания. Группа Шапиро решила эту проблему, измеряя распределения вернувшегося сигнала как по времени прибытия, так и по частоте. Вследствие вращения и орбитального движения Земли и Меркурия каждый элемент отражающей поверхности имеет относительно антенны радара определенную скорость, а потому элемент отражает радиолокационный сигнал с определенным доплеровским смещением частоты. Тогда если известны отражающие свойства поверхности, то, анализируя наблюдаемое распределение возвращающегося эха по времени и по частоте, можно найти время прибытия эха, отразившегося от ближайшей к Земле точки поверхности Меркурия.

Отражающие свойства поверхности можно исследовать, изучая эхо от Меркурия, когда он находится вблизи нижнего соединения,

поскольку отношение сигнала к шуму в этом положении наибольшее и никакие известные эффекты общей теории относительности не влияют на время распространения сигнала.

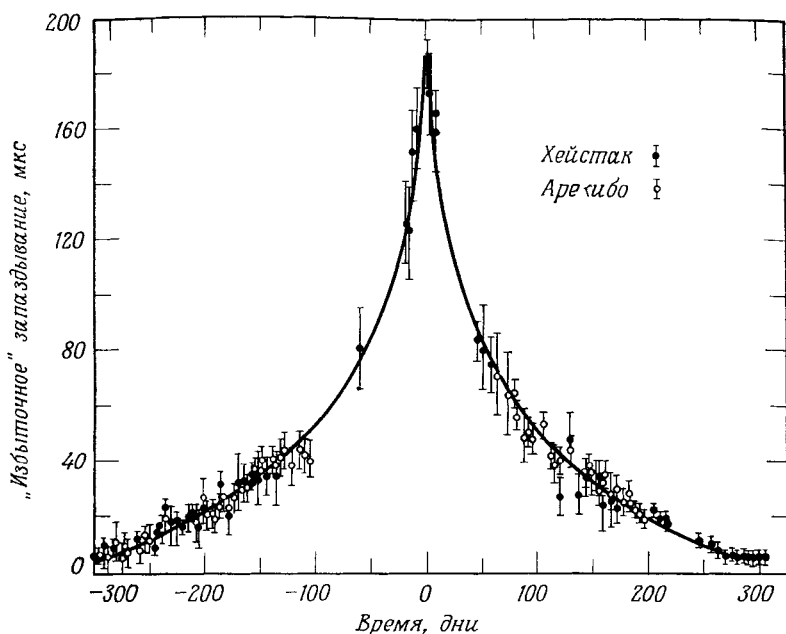
Основная трудность состоит в том, что для вычисления дополнительного времени запаздывания порядка, например, 10 мкс необходимо знать с той же точностью время, за которое радиосигнал прошел бы этот путь в отсутствие поля тяготения Солнца, т. е. мы должны знать расстояние

$$(r_{\oplus}^2 - r_0^2)^{1/2} + (r_{\zeta}^2 - r_0^2)^{1/2}$$

с точностью до 1,5 км! Здесь r_{\oplus} , r_{ζ} и r_0 — расстояния (в «стандартных» координатах) от центра Солнца до радарной антенны, находящейся на Земле, до ближайшей к Земле точки на поверхности Меркурия и до точки наибольшего сближения сигнала с Солнцем соответственно. Однако одна оптическая астрономия, конечно, не в состоянии определить со сколько-нибудь близкой к указанной точностью положение центров Меркурия и Земли или же радиус Меркурия. Более того, требование столь высокой точности связано с необходимостью определить, имеем ли мы дело со стандартными, изотропными или гармоническими координатами. Можно не сомневаться в том, чтобы даже Военно-Морская обсерватория США не обращает внимания на столь тонкие отличия! Группа Шапиро справилась с этой проблемой, используя общую теорию относительности, чтобы выразить $r_{\oplus}(t)$, $r_{\zeta}(t)$ и $r_0(t)$ через большой набор неизвестных параметров, включающих β , γ , $M_{\odot}G$, экваториальный радиус Меркурия, а также положения и скорости Меркурия и Земли в некоторый начальный момент времени. Эти параметры были затем определены подгонкой наблюдаемого времени движения радиосигнала до Меркурия и обратно по теоретическим формулам (8.7.3) и (8.7.4).

Первый эксперимент, в котором был использован работающий на частоте 7840 МГц Хейстакский радар Линкольновской лаборатории, проведенный во время верхних соединений Меркурия с 28 апреля до 20 мая и с 15 августа до 10 сентября 1967 г., дал хорошее согласие теории и наблюдений [25]. Чтобы оценить это количественно, укажем, что при вычислении для произвольного γ с помощью уравнений (8.7.3) и (8.7.4) времени запаздывания сигнала наилучшее соответствие получается при $\gamma = 0,8 \pm 0,4$. (В предварительном анализе β было принято за единицу по чисто техническим причинам.) Дальнейшие наблюдения в Хейстаке и улучшенный анализ данных дали следующий результат [26]:

$$\gamma = 1,03 \pm 0,1 \quad (8.7.7)$$



Фиг. 8.3. Сравнение теоретических и наблюдаемых значений времени запаздывания радиосигнала от Венеры [26].

Верхнее соединение: 25 янв. 1970 г.

(фиг. 8.3). В дополнение к этому в связи с появлением новых радиолокационных данных Шапиро вновь проанализировал [27] свыше 400 000 ранее выполненных оптических наблюдений Солнца, Луны и планет и нашел, что квадрупольный член гравитационного потенциала Солнца имеет величину $J_2 = (-0,8 \pm 2,5) \times 10^{-5}$, причем J_2 определяется разложением по полиномам Лежандра:

$$\phi_{\odot} = -\frac{GM_{\odot}}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^l P_l(\cos \theta) \right\}.$$

Укажем для сравнения, что сплюснутость Солнца, найденная Дикке и Голденбергом, соответствует квадрупольному члену $J_2 = (2,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}$. Если J_2 обратить в нуль, то, согласно анализу Шапиро, значения дополнительной прецессии перигелия орбит Меркурия и Марса будут равны значениям, предсказываемым общей теорией относительности, умноженным на $(0,99 \pm 0,01)$ и $(1,07 \pm 0,1)$ соответственно.

Шапиро [28] предложил также измерить время запаздывания радиоимпульса, приходящего от пульсара. Когда пульсар CP0952

наблюдается вместе с Солнцем в телесном угле с раствором 5° , то в это время радиоимпульс должен запаздывать приблизительно на 50 мкс.

Недавно группа Лаборатории реактивного движения измерила [29] время запаздывания радиосигналов, посланных с Земли на ретрансляторы на борту искусственных спутников «Маринер» 6 и 7 и вернувшихся оттуда на Землю, в период март — июнь 1970 г., когда эти спутники были вблизи нижнего соединения. Наилучшие данные были получены 28 апреля, когда радиосигнал прошел на расстоянии трех солнечных радиусов от центра Солнца. Анализ этих данных дает время запаздывания, совпадающее с точностью до 5% с предсказаниями общей теории относительности. К сожалению, частота, использованная в этом эксперименте, лежала в S -полосе, т. е. вблизи 2300 МГц, и поэтому солнечная корона приводила здесь к осложнениям (§ 5 гл. 8). К тому же спутники «Маринер» ввиду их малости испытывают заметное влияние негравитационных сил, возникающих в основном из-за давления солнечного излучения, утечки газа и разбалансировки системы, контролирующей ориентацию.

Время возвращения радарного эха сильно зависит от незначительных особенностей орбитального движения, и это превращает вычисление «теоретического» времени возвращения в задачу огромной трудности. Мы не будем рассматривать ее здесь, поскольку она выходит за рамки простого аналитического рассмотрения, принятого в этой книге. Есть, однако, возможность получить представление об этом, рассмотрев достаточно идеализированную ситуацию.

Будем считать, что сигнал отражается от точечной планеты I , находящейся на круговой орбите радиусом r_1 вокруг Солнца, а радарную антенну поместим на планету 2 , которая движется в плоскости орбиты планеты I ($\theta = \pi/2$), но настолько удалена от Солнца, что ее положение можно считать фиксированным с $r_2 \gg r_1$ и $\phi_2 = 0$. (Величина ϕ_2 за время прохождения сигнала изменяется как $r_2^{-1/2}$.) Радиосигнал, испущенный в момент времени t с планеты 2 , достигнет планеты I в момент времени t_1 задаваемый (для $|\phi_1| > \pi/2$) следующим образом:

$$t_1 = t + t(r_1, r_0) + t(r_2, r_0),$$

или, используя (8.7.4) при $r_2 \rightarrow \infty$, получаем

$$t_1 = t + T + (r_1^2 - r_0^2)^{1/2} + MG \left(\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} \right)^{1/2} + \\ + (1 + \gamma) MG \ln \left(\frac{[r_1 + (r_1^2 - r_0^2)^{1/2}] r_1}{r_0^2} \right), \quad (8.7.8)$$

где T — большая постоянная величина, равная

$$T \equiv r_2 + MG + (1 + \gamma) MG \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \quad (8.7.9)$$

В этот момент времени азимутальный угол планеты задается с помощью уравнения (8.4.27) следующим образом:

$$\varphi_1 = \varphi(0) + \omega t_1, \quad (8.7.10)$$

$$\omega \approx \left(\frac{MG}{r_1^3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{(\beta - \gamma) MG}{r_1} \right) \quad (8.7.11)$$

И наконец, r_0 можно вычислить, положив φ_1 равным величине, определяемой уравнением (8.5.7), а именно

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= [\varphi(r_0) - \varphi(r_1)] + [\varphi(r_0) - \varphi(\infty)] = \\ &= \pi - \arcsin \left(\frac{r_0}{r_1} \right) + \left(\frac{MG}{r_0} \right) \left[1 + \gamma + \gamma \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Тогда в первом порядке по MG имеем

$$r_0 \approx r_1 \sin \varphi_1 - MG \operatorname{ctg} \varphi_1 \left[1 + \gamma - \gamma \cos \varphi_1 + \left(\frac{1 - \sin \varphi_1}{1 + \sin \varphi_1} \right)^{1/2} \right]. \quad (8.7.12)$$

Подставляя (8.7.10) — (8.7.12) в (8.7.8), получим следующее соотношение между t — временем излучения первоначального радарного сигнала и t_1 — временем отражения сигнала:

$$t_1 = t + T - a \cos(\omega t_1 + \varphi(0)) - b \{ 1 - \ln [1 + \cos(\omega t_1 + \varphi(0))] \}, \quad (8.7.13)$$

где

$$a \equiv r_1 - \gamma MG, \quad (8.7.14)$$

$$b \equiv (1 + \gamma) MG. \quad (8.7.15)$$

Соотношение (8.7.13) можно разрешить относительно $t_1(t)$, и тогда момент прибытия эха обратно определится так:

$$t_2(t) = t + 2[t_1(t) - t] = 2t_1(t) - t. \quad (8.7.16)$$

Сравнивая это теоретическое предсказание с наблюдаемым временем возвращения радиозэха, можно в принципе определить пять параметров:

$$T, \quad a, \quad b, \quad \omega, \quad \varphi(0).$$

Но эти параметры зависят от шести неизвестных величин: $r_1, r_2, MG, \gamma, \beta$ и $\varphi(0)$; поэтому даже если наши измерения и соотношения (8.7.13) — (8.7.16) будут совершенно точными, мы не в состоянии определить ни β , ни γ . Лучшим выходом будет исключить из формул (8.7.11), (8.7.14), (8.7.15) для ω, a и b величины r_1

и MG и таким способом получить формулу для γ :

$$1 + \gamma = ba^{-3}\omega^{-2} \left[1 + O \left(\frac{MG}{a} \right) \right]. \quad (8.7.17)$$

Отметим, что в данном случае β нельзя определить, измеряя запаздывание радиосигнала, даже в принципе (интересные соображения по этому вопросу содержатся в [30, 31]). Чтобы стало возможным определить и β и γ , необходимо наблюдать радиоэхо, отраженное от *двух* планет, находящихся на круговых орбитах, поскольку в этом случае есть десять наблюдаемых параметров и из них только восемь неизвестны. Более важным является то, что β можно измерить, наблюдая радиоэхо только от Меркурия, поскольку его орбита настолько вытянута, что ее прецессия существенно влияет на время возвращения радиосигнала.

§ 8. Сингулярность Шварцшильда *

Читатель, возможно, обратил внимание на то, что решение Шварцшильда (8.2.12) становится при $r = 2MG$ сингулярным. Это значение радиуса соответствует $\rho = MG/2$ и $R = MG$, откуда видно, что эта сингулярность возникает в том случае, когда метрика выражена в изотропной (8.2.14) или гармонической (8.2.15) формах. Радиус, при котором в стандартных координатах возникает сингулярность, называется *шварцшильдовским радиусом* массы M .

Следует сразу подчеркнуть, что ни у одного из известных объектов во Вселенной гравитационное поле не имеет сингулярности Шварцшильда. Сингулярность Шварцшильда возникает в решении вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$, и, следовательно, не существенна, если радиус $2GM$ находится внутри массивного тела, где необходимо использовать полное уравнение Эйнштейна (7.1.13). Для Солнца радиус Шварцшильда $2GM_{\odot}$ равен 2,95 км, т. е. находится глубоко внутри Солнца, и, как мы убедимся в гл. 11, решение полного уравнения Эйнштейна для внутренней части стабильной звезды не имеет ни сингулярности Шварцшильда, ни какой-либо другой сингулярности. Для протона радиус Шварцшильда равен 10^{-50} см, что на 37 порядков ниже, чем характерный радиус протона 10^{-13} см! Как мы увидим из дальнейшего (гл. 11), очень массивное тело может коллапсировать до радиуса, много меньшего его шварцшильдовского радиуса, но, за этим одним гипотетическим исключением, сингулярность Шварцшильда, кажется, не имеет большого отношения к реальному миру.

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.