и MG и таким способом получить формулу для γ:

$$1+\gamma=ba^{-3}\omega^{-2}\left[1+O\left(\frac{MG}{a}\right)\right]. \qquad (8.7.17)$$

Отметим, что в данном случае β нельзя определить, измеряя запаздывание радиосигнала, даже в принципе (интересные соображения по этому вопросу содержатся в [30, 31]). Чтобы стало возможным определить и β и γ, необходимо наблюдать радиоэхо, отраженное от *двух* планет, находящихся на круговых орбитах, поскольку в этом случае есть десять наблюдаемых параметров и из них только восемь неизвестны. Более важным является то, что β можно измерить, наблюдая радиоэхо только от Меркурия, поскольку его орбита настолько вытянута, что ее прецессия существенно влияет на время возвращения радиосигнала.

§ 8. Сингулярность Шварцшильда *

Читатель, возможно, обратил внимание на то, что решение Шварцшильда (8.2.12) становится при $r = 2MG$ сингулярным. Это значение радиуса соответствует $\rho = MG/2$ и $R = MG$, откуда видно, что эта сингулярность возникает в том случае, когда метрика выражена в изотропной (8.2.14) или гармонической (8.2.15) формах. Радиус, при котором в стандартных координатах возникает сингулярность, называется *шварцшильдовским радиусом* массы M.

Следует сразу подчеркнуть, что ни у одного из известных объектов во Вселенной гравитационное поле не имеет сингулярности Шварцшильда. Сингулярность Шварцшильда возникает в решении вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$, и, следовательно, не существенна, если радиус $2GM$ находится внутри массивного тела, где необходимо использовать полное уравнение Эйнштейна (7.1.13). Для Солнца радиус Шварцшильда $2GM_\odot$ равен 2,95 км, т. е. находится глубоко внутри Солнца, и, как мы убедимся в гл. 11, решение полного уравнения Эйнштейна для внутренней части стабильной звезды не имеет ни сингулярности Шварцшильда, ни какой-либо другой сингулярности. Для протона радиус Шварцшильда равен 10^{-50} см, что на 37 порядков ниже, чем характерный радиус протона 10^{-13} см! Как мы увидим из дальнейшего (гл. 11), очень массивное тело может коллапсировать до радиуса, много меньшего его шварцшильдовского радиуса, но, за этим одним гипотетическим исключением, сингулярность Шварцшильда, кажется, не имеет большого отношения к реальному миру.

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

Тем не менее поучительно представить себе настолько малое и массивное тело, что радиус $2GM$ лежит вне его, в пустом пространстве. Тогда решение Шварцшильда выполняется для этого радиуса, и действительно возникает сингулярность. Но будет ли реально проявляться эта сингулярность? Легко вычислить четыре неисчезающих инварианта кривизны, описанных в § 7 гл. 6 и увидеть, что на радиусе Шварцшильда все они имеют идеально хорошее поведение, хотя и становятся сингулярными в нуле. Это наводит на мысль, что кажущаяся сингулярность Шварцшильда может быть только свойством системы координат, нами использованной. (Если на радиусе Шварцшильда хотя бы один инвариант кривизны был бы сингулярным, то эта сингулярность, конечно, проявлялась бы во всех системах координат.) Лишь не очень давно была найдена система координат, в которой можно избежать сингулярности Шварцшильда, если допустить возможность того, что мир имеет необычную топологию [32]. Чтобы продемонстрировать эту новую интерпретацию сингулярности Шварцшильда, введем новый набор координат r', θ, φ, t' следующим образом:

$$r'^2 - t'^2 \equiv T^2 \left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2GM}\right), \tag{8.8.1}$$

$$\frac{2r't'}{r'^2 + t'^2} \equiv \operatorname{th}\left(\frac{t}{2MG}\right), \tag{8.8.2}$$

где T — произвольная константа. Тогда решение Шварцшильда приобретает вид

$$d\tau^2 = \left(\frac{32G^3M^3}{rT^2}\right) \exp\left(\frac{-r}{2GM}\right)(dt'^2 - dr'^2) - \\ - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \tag{8.8.3}$$

где r считается теперь функцией интервала $r'^2 - t'^2$, задаваемого выражением (8.8.1). Метрика будет несингулярной, пока r^2 имеет хорошее поведение и положительно определено, т. е. при условии

$$r'^2 > t'^2 - T^2.$$

Следовательно, для временного интервала $0 < t' < T$ и всех действительных r' метрика будет совершенно гладкой, финитной функцией r'. Действительно, даже $g_{\theta\theta}$ и $g_{\varphi\varphi}$ не исчезают при $r' = 0$, так что, когда мы приближаемся к началу координат $r' = 0$, ничто не мешает нам продолжить на отрицательные r! Следовательно, пространство, описываемое (8.3.3), свободно от сингулярностей и состоит из двух тождественных листов с $r' > 0$ и $r' < 0$, переходящих друг в друга непрерывным образом в точке ветвления $r' = 0$. Когда t' достигает значения T, листы разъединяются и с этого момента в метрике появляется действительная сингулярность при $r' = \pm\sqrt{t'^2 - T^2}$, т. е. при $r = 0$. Однако если даже это так, метрика не имеет сингулярности при $r' = t'$, что соответствует радиусу Шварцшильда $r = 2GM$.

Напомним еще раз, что сингулярность Шварцшильда не возникает в реально существующих во Вселенной гравитационных полях. В самом деле, эта сингулярность не может проявиться даже при гравитационном коллапсе (§ 9 гл. 11), ибо при $t' < T$ пространство пусто для всех r'. Однако, как из басен Эзопа, отсюда следует полезная мораль. Она состоит в том, что появляющаяся в одной системе координат сингулярность в другой системе координат может иметь совершенно другую интерпретацию.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Брагинский В. Б., *Руденко В. Л.*, УФН, **100**, 395 (1970).

Bertotti B., *Brill D.*, *Krotkov R.*, Experiments in Gravitation, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed.L Witten, Wiley, 1962, p. 1.

Dicke R. H., Experimental Relativity, в книге Relativity, Groups, and Topology, ed. C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach Science Publ., 1964, p. 163.

Dyson F. J., Experimental Tests of General Relativity, в книге Relativity-Theory and Astrophysics 1. Relativity and Cosmology, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1967, p. 117.

Schiff L. I., Comparison of Theory and Observation in General Relativity, в книге Relativity Theory and Asrophysics 1. Relativity and Cosmology (см. выше), p. 105.

Thorne K. S., *Will C. M.*, High Precision Tests of General Relativity, Comments Astrophys. and Space Phys., **2**, 35 (1970).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Robertson H. P.*, в книге Space Age Astronomy, ed, A. J. Deutsch and W. B. Klemperer Academic Press, 1962, p. 228.
2. *Eddington A. S.*, The Mathematical Theory of Relativity, 2nd ed., Cambridge University Press, 1924, p. 105 (см. перевод: *Эддингтон А. С.*, Математическая теория относительности, Гос. научн. тех. изд., 1933).
3. *Dyson F. W.*, *Eddington A. S.*, *Davidson C.*, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), **220A**, 291 (1920); Mem. Roy. Astron. Soc. 62, 291 (1920).
4. *Von Klüber H.*, в книге Vistas in Astronomy, ed. A. Beer, Vol. 3, Pergamon Press, 1960, p. 47.
5. *Bertotti B.*, *Brill D.*, *Krotkov R.*, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, Wiley, 1962, p. 1.
6. *Trumpler R. J.*, Helv. Phys. Acta, Suppl., **IV**, 106 (1956).
7. *Mikhailov A. A.*, Astron. Zh., **33**, 912 (1956).
8. *Shapiro I. I.*, Science, **157**, 806 (1967).
9. *Clemence G. M.*, Astron. Papers Am. Ephemeris, **11**, Part 1 (1943).
10. *Clemence G. M.*, Rev. Mod. Phys., **19**, 361 (1947).
11. *Duncombe R. L.*, *Astron J.*, 61, 174 (1956); Astron. Papers Am. Ephemeris, **16**, Part 1 (1958).
12. *Duncombe R. L.*, *Clemence G. M.*, Astron. J., **63**, 456 (1958).
13. *Shapiro I. I.*, *Smith W. B.*, *Ash M. E.*, *Herrick S.*, Astron. J., **76**, 588 (1971).
14. *Shapiro I. I.*, *Ash M. E.*, *Smith W. B.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1517(1968).