Я думаю, что сейчас у нашего руля почти все время стоит Исаак Ньютон.

Астронавт Вильям А. Андерс на обратном пути после первого облета Луны, 26.12.68

Глава 9

ПОСТНЬЮТОНОВСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Уравнения поля Эйнштейна нелинейны и потому не могут быть точно решены в общем виде. Налагая требования симметрии — независимость от времени и изотропию пространства, нам удалось найти одно точное полезное решение — метрику Шварцшильда, но невозможно в полной мере использовать это решение, поскольку Солнечная система в действительности *не* является ни статической, ни изотропной. В самом деле, ньютоновские эффекты в гравитационных полях планет на порядок величины больше, чем первые поправки, связанные с общей теорией относительности, и совершенно нечувствительны к высшим поправкам, которые в принципе возникают из точного решения Шварцшильда.

Вот почему нам не нужно искать более точного решения, а следует развивать систематический приближенный метод безотносительно к каким-либо предполагаемым свойствам симметрии системы. Существуют два таких особенно полезных метода; они называются *постньютоновским приближением* [1] и *приближением слабого поля.* Первый из них применим к системам, подобным солнечной, т. е. к системам медленно движущихся частиц, связанных гравитационными силами. Именно такие системы являются предметом рассмотрения в данной главе. Во втором методе поля рассматриваются в приближении низшего порядка, но не предполагается, что материя движется нерелятивистски. Такое приближение применимо для изучения гравитационного излучения и будет обсуждаться в следующей главе. Ясно, что существует область, в которой методы перекрываются, а именно когда частицы медленно движутся в очень слабых полях. Однако ввиду их различных применений эти методы лучше разделить.

Постньютоновское приближение исторически возникло [1] как один из результатов исследования следующей *проблемы движения*: могут ли уравнения движения массивных частиц вытекать из одних только уравнений гравитационного поля? Согласно точке зрения, принятой в этой книге, уравнения движения в общей теории относительности следуют из уравнений движения специальной теории относительности и принципа эквивалентности.

Поэтому в этой главе мы будем рассматривать постньютоновское приближение как метод, представляющий собственный интерес, а не как часть проблемы движения.

§ 1. Постньютоновское приближение

Рассмотрим систему частиц, которые, подобно Солнцу и планетам, связаны взаимным гравитационным притяжением. Пусть $\overline{M}$, $\overline{v}$ и $\overline{r}$ — средние значения масс, скоростей частиц и расстояний между ними. В ньютоновской механике есть хорошо известный результат, что среднее значение кинетической энергии $^1/_2\overline{M}\,\overline{v}^2$ по порядку величины примерно равно характерной потенциальной энергии $G\overline{M}^2/\overline{r}$, поэтому

$$\overline{v}^2 \sim \frac{G\overline{M}}{\overline{r}}. \tag{9.1.1}$$

(Например, частица, вращающаяся по круговой орбите радиусом r вокруг центральной массы M, имеет скорость v, задаваемую в ньютоновской механике точной формулой $v^2 = GM/r$.) Постньютоновское приближение можно рассматривать как метод описания движения системы на один порядок точнее по малым параметрам $G\overline{M}/\overline{r}$ и $\overline{v}^2$, чем это делает ньютоновская механика. Иногда говорят о разложении по обратным степеням скорости света, но так как в нашей системе единиц $c = 1$, мы будем считать параметром разложения $\overline{v}^2$ или, эквивалентно, $G\overline{M}/\overline{r}$.

Прежде всего посмотрим, в чем состоит наша задача. Уравнения движения частиц имеют вид

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0.$$

Отсюда можно вычислить ускорения следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{dx^i}{d\tau}\right] = \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2}\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-3}\frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{dx^i}{d\tau} = \\ &= -\Gamma^i{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma^0{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^i}{dt}.\end{aligned}$$

Более подробно это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} = &-\Gamma^i_{00} - 2\Gamma^i{}_{0j}\frac{dx^j}{dt} - \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \\ &+ \left[\Gamma^0{}_{00} + 2\Gamma^0{}_{0j}\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^0{}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right]\frac{dx^i}{dt}.\end{aligned} \tag{9.1.2}$$

В ньютоновском приближении, которое мы обсуждали в § 4 гл. 3, все скорости считались исчезающе малыми и в разности между $g_{\mu\nu}$ и тензором Минковского $\eta_{\mu\nu}$ удерживались лишь члены первого порядка. При этом мы получали

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i{}_{00} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}.$$

Но (g_{00} — 1) есть величина порядка $G\overline{M}/\overline{r}$, поэтому ньютоновское приближение приводит к величине d^2x^i/dt^2 порядка $G\overline{M}/\overline{r}^2$, или, что то же самое, $\overline{v}^2/\overline{r}$. *Следовательно, цель постньютоновского приближения состоит в том, чтобы вычислить значения* d^2x^i/dt^2 *с точностью до* $\overline{v}^4/\overline{r}$. Глядя на уравнение (9.1.2), мы видим, что нам необходимо иметь компоненты аффинной связности со следующей точностью:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^i{}_{00}, & \text{включая члены порядка} & \overline{v}^4/\overline{r}, \\
\Gamma^i{}_{0j}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \overline{v}^3/\overline{r}, \\
\Gamma^i{}_{jk}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \overline{v}^2/\overline{r}, \\
\Gamma^0{}_{00}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \overline{v}^3/\overline{r}, \\
\Gamma^0{}_{0j}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \overline{v}^2/\overline{r}, \\
\Gamma^0{}_{jk}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \overline{v}/\overline{r}.
\end{array} \tag{9.1.3}$$

Исходя из нашего опыта по нахождению решения Шварцшильда, мы можем думать, что существует система координат, в которой метрический тензор почти равен тензору Минковского $\eta_{\mu\nu}$, причем поправки можно разложить по степеням $\overline{M}\,\overline{G}/\overline{r} \sim \overline{v}^2$. В частности, мы полагаем, что справедливы следующие разложения:

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \ldots, \tag{9.1.4}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij} + \ldots, \tag{9.1.5}$$

$$g_{i0} = \overset{3}{g}_{i0} + \overset{5}{g}_{i0} + \ldots, \tag{9.1.6}$$

где символ $\overset{N}{g}_{\mu\nu}$ означает член порядка $\overline{v}^N$ в $g_{\mu\nu}$. Зависимость от нечетных степеней $\overline{v}$ в g_{i0} возникает из-за того, что g_{i0} должно менять знак при обращении времени $t \to -t$. Действительное оправдание такого разложения будет дано ниже, когда мы покажем, что оно приводит к самосогласованному решению эйнштейновских уравнений поля.

Обратный метрический тензор определяется следующими соотношениями:

$$g^{i\mu}g_{0\mu}=g^{i0}g_{00}+g^{ij}g_{j0}=0, \tag{9.1.7}$$

$$g^{0\mu}g_{0\mu}=g^{00}g_{00}+g^{0i}g_{0i}=1, \tag{9.1.8}$$

$$g^{i\mu}g_{j\mu}=g^{i0}g_{j0}+g^{ik}g_{jk}=\delta_{ij}. \tag{9.1.9}$$

Мы полагаем, что

$$g^{00}=-1+\overset{2}{g}{}^{00}+\overset{4}{g}{}^{00}+\ldots, \tag{9.1.10}$$

$$g^{ij}=\delta_{ij}+\overset{2}{g}{}^{ij}+\overset{4}{g}{}^{ij}+\ldots, \tag{9.1.11}$$

$$g^{i0}=\overset{3}{g}{}^{i0}+\overset{5}{g}{}^{i0}+\ldots, \tag{9.1.12}$$

и, подставляя эти разложения в соотношения (9.1.7) — (9.1.9), получаем

$$\overset{2}{g}{}^{00}=-\overset{2}{g}_{00},\qquad \overset{2}{g}{}^{ij}=-\overset{2}{g}_{ij},\qquad \overset{3}{g}{}^{i0}=\overset{3}{g}_{i0}\ \text{и т. д.} \tag{9.1.13}$$

Аффинную связность можно получить из хорошо известной формулы

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left\{\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right\}.$$

При вычислении $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ мы должны учесть, что в качестве масштабов расстояния и времени в нашей системе выбраны $\bar{r}$ и $\bar{r}/\bar{v}$ соответственно. Поэтому будем считать, что пространственные и временны́е производные имеют следующий порядок:

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}}\sim\frac{1}{\bar{r}},\qquad \frac{\partial}{\partial t}\sim\frac{\bar{v}}{\bar{r}}.$$

Используя наши оценки (9.1.4) — (9.1.6) и (9.1.10) — (9.1.13), находим, что компоненты Γ^{i}_{00}, Γ^{i}_{jk} и Γ^{0}_{0i} имеют разложения

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}=\overset{2}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\nu\lambda}+\overset{4}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\nu\lambda}+\ldots\qquad (\text{для } \Gamma^{i}{}_{00},\ \Gamma^{i}{}_{jk},\ \Gamma^{0}{}_{0i}), \tag{9.1.14}$$

а компоненты $\Gamma^{i}{}_{0j}$, $\Gamma^{0}{}_{00}$ и $\Gamma^{0}{}_{ij}$ имеют разложения

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}=\overset{3}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\nu\lambda}+\overset{5}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\nu\lambda}+\ldots\qquad (\text{для } \Gamma^{i}{}_{0j},\ \Gamma^{0}{}_{00},\ \Gamma^{0}{}_{ij}). \tag{9.1.15}$$

Здесь символ $\overset{N}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ означает член порядка $\bar{v}^{N}/\bar{r}$ в $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$. Компоненты, перечисленные в (9.1.3), имеют следующий явный вид:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}, \tag{9.1.16}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{4}{g}_{00}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial \overset{3}{g}_{i0}}{\partial t}+\frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{j}}, \tag{9.1.17}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^i{}_{0j}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^j}+\frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{3}{g}_{j0}}{\partial x^i}\right], \tag{9.1.18}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{jk}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial \overset{2}{g}_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right], \tag{9.1.19}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^0{}_{00}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial t}, \tag{9.1.20}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^0{}_{0i}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}, \tag{9.1.21}$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^0{}_{ij}=0. \tag{9.1.22}$$

Очевидно, что нам необходимо знать компоненты g_{ij}, включая члены порядка $\bar{v}^2$, g_{i0} до порядка $\bar{v}^3$ и g_{00} до порядка $\bar{v}^4$. Напомним для сравнения требования ньютоновского приближения, когда надо знать g_{00} с учетом порядка $\bar{v}^2$, а g_{i0} и g_{ij} только в нулевом порядке.

Чтобы вычислить тензор Риччи, используем (6.1.5):

$$R_{\mu\varkappa}\equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\varkappa}=\frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\varkappa}}-\frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\varkappa\eta}-\Gamma^{\eta}{}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\lambda}.$$

Из (9.1.14) и разложений (9.1.15) и (9.1.16) находим, что компоненты тензора $R_{\mu\varkappa}$ имеют разложения вида

$$R_{00}=\overset{2}{R}_{00}+\overset{4}{R}_{00}+\ldots, \tag{9.1.23}$$

$$R_{i0}=\overset{3}{R}_{i0}+\overset{5}{R}_{i0}+\ldots, \tag{9.1.24}$$

$$R_{ij}=\overset{2}{R}_{ij}+\overset{4}{R}_{ij}+\ldots, \tag{9.1.25}$$

где $\overset{N}{R}_{\mu\nu}$ означает член порядка $\bar{v}^{N}\bar{r}^{-2}$ в $R_{\mu\nu}$. Члены, которые можно вычислить, пользуясь «известными» разложениями компонент аффинной связности, таковы:

$$\overset{2}{R}_{00}=-\frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{00}}{\partial x^i} \tag{9.1.26}$$

$$\overset{4}{R}_{00}=\frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^i{}_{0i}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{4}{\Gamma}{}^i{}_{00}}{\partial x^i}+\overset{2}{\Gamma}{}^0{}_{0i}\overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{00}-\overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{00}\overset{2}{\Gamma}{}^j{}_{ij}, \tag{9.1.27}$$

$$\overset{3}{R}_{i0}=\frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{j}{}_{ij}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^{j}{}_{0i}}{\partial x^{j}}, \tag{9.1.28}$$

$$\overset{2}{R}_{ij}=\frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{i0}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{k}{}_{ik}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{k}{}_{ij}}{\partial x^{k}}. \tag{9.1.29}$$

Если использовать (9.1.16) — (9.1.21), получим

$$\overset{2}{R}_{00}=\frac{1}{2}\nabla^{2}\overset{2}{g}_{00}, \tag{9.1.30}$$

$$\begin{aligned}\overset{4}{R}_{00}={}&\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{ii}}{\partial t^{2}}-\frac{\partial^{2}\overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^{i}\,\partial t}+\frac{1}{2}\nabla^{2}\overset{4}{g}_{00}-\\&-\frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}\,\partial x^{j}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^{j}}\right)\left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}\right)+\\&+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}\right)\left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}\right)\left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^{i}}\right),\end{aligned} \tag{9.1.31}$$

$$\overset{3}{R}_{i0}=\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^{i}\,\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{3}{g}_{j0}}{\partial x^{i}\,\partial x^{j}}-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^{j}\partial t}+\frac{1}{2}\nabla^{2}\overset{3}{g}_{i0}, \tag{9.1.32}$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{R}_{ij}={}&-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}\,\partial x^{j}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{kk}}{\partial x^{i}\,\partial x^{j}}-\\&-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{ik}}{\partial x^{k}\,\partial x^{j}}-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{kj}}{\partial x^{k}\,\partial x^{i}}+\frac{1}{2}\nabla^{2}\overset{2}{g}_{ij}.\end{aligned} \tag{9.1.33}$$

Теперь можно сильно упростить все выражения, выбрав подходящую систему координат. Мы показали в § 4 гл. 7, что x^{μ} всегда можно определить так, чтобы оно подчинялось условию гармоничности координат:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=0. \tag{9.1.34}$$

Используя (9.1.10) — (9.1.13) и (9.1.16) — (9.1.21), находим, что исчезающий набор членов третьего порядка в $g^{\mu\nu}\Gamma^{0}{}_{\mu\nu}$ имеет вид

$$0=\frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial t}-\frac{\partial\overset{3}{g}_{0i}}{\partial x^{i}}+\frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{ii}}{\partial t}, \tag{9.1.35}$$

а равные нулю члены второго порядка в $g^{\mu\nu}\Gamma^{i}{}_{\mu\nu}$ записываются так:

$$0=\frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial\overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^{j}}-\frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^{i}}. \tag{9.1.36}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ii}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^i\,\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ii}}{\partial t\,\partial x^j}-\frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^i\,\partial x^j}-\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^i\,\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^j}+\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{kj}}{\partial x^j\,\partial x^i}-\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^i\,\partial x^k}+\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\,\partial x^k}=0$$

и выражения (9.1.30) — (9.1.33) дают теперь упрощенные формулы для тензора Риччи:

$$\overset{2}{R}_{00}=\frac{1}{2}\nabla^2\overset{2}{g}_{00}, \tag{9.1.37}$$

$$\overset{4}{R}_{00}=\frac{1}{2}\nabla^2\overset{4}{g}_{00}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\,\partial x^j}+\frac{1}{2}(\nabla\overset{2}{g}_{00})^2 \tag{9.1.38}$$

$$\overset{3}{R}_{0i}=\frac{1}{2}\nabla^2\overset{3}{g}_{i0}, \tag{9.1.39}$$

$$\overset{2}{R}_{ij}=\frac{1}{2}\nabla^2\overset{2}{g}_{ij}. \tag{9.1.40}$$

Мы готовы использовать полные уравнения Эйнштейна, записанные в форме

$$R_{\mu\nu}=-8\pi G\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right). \tag{9.1.41}$$

Исходя из нашей интерпретации плотности энергии, плотности импульса и потока импульса, мы полагаем, что разложения T^{00}, T^{i0} и T^{ij} имеют вид:

$$T^{00}=\overset{0}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{00}+\ldots, \tag{9.1.42}$$

$$T^{i0}=\overset{1}{T}{}^{i0}+\overset{3}{T}{}^{i0}+\ldots, \tag{9.1.43}$$

$$T^{ij}=\overset{2}{T}{}^{ij}+\overset{4}{T}{}^{ij}+\ldots, \tag{9.1.44}$$

где символ $\overset{N}{T}{}^{\mu\nu}$ означает член $T^{\mu\nu}$ порядка $(\overline{M}/\overline{r}^{3})\,\overline{v}^{N}$. (В частности, $\overset{0}{T}{}^{00}$ есть плотность массы покоя, а $\overset{2}{T}{}^{00}$ — нерелятивистская часть плотности энергии.) Итак, выражение, которое необходимо знать, имеет вид

$$S_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}. \tag{9.1.45}$$

Но $G\bar{M}/\bar{r}$ имеет порядок $\bar{v}^2$, поэтому формулы (9.1.4) — (9.1.6) и (9.1.42) — (9.1.44) приводят к следующим выражениям:

$$S_{00} = \overset{0}{S}_{00} + \overset{2}{S}_{00} + \ldots, \tag{9.1.46}$$

$$S_{i0} = \overset{1}{S}_{i0} + \overset{3}{S}_{i0} + \ldots, \tag{9.1.47}$$

$$S_{ij} = \overset{0}{S}_{ij} + \overset{2}{S}_{ij} + \ldots, \tag{9.1.48}$$

где $\overset{N}{S}_{\mu\nu}$ есть член порядка $\bar{M}\bar{v}^N/\bar{r}^3$ в $S_{\mu\nu}$. В частности, имеем

$$\overset{0}{S}_{00} = \frac{1}{2} \overset{0}{T}{}^{00}, \tag{9.1.49}$$

$$\overset{2}{S}_{00} = \frac{1}{2} [\overset{2}{T}{}^{00} - 2\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii}], \tag{9.1.50}$$

$$\overset{1}{S}_{i0} = -\overset{1}{T}{}^{0i}, \tag{9.1.51}$$

$$\overset{0}{S}_{ij} = +\frac{1}{2} \delta_{ij}\overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.1.52}$$

Подставляя (9.1.37) — (9.1.40) и (9.1.46) — (9.1.52) в уравнения поля (9.1.41), видим, что уравнения в гармонических координатах действительно согласуются с использованными разложениями, и это приводит к таким результатам:

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{00} = -8\pi G\overset{0}{T}{}^{00}, \tag{9.1.53}$$

$$\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} = -\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} + \overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\, \partial x^j} - \left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right) - \\ - 8\pi G [\overset{2}{T}{}^{00} - 2\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii}], \tag{9.1.54}$$

$$\nabla^2 \overset{3}{g}_{i0} = +16\pi G\overset{1}{T}{}^{i0}, \tag{9.1.55}$$

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{ij} = -8\pi G\delta_{ij}\overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.1.56}$$

Из (9.1.53), как и ожидалось, вытекает следующее соотношение:

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi, \tag{9.1.57}$$

где ϕ — *потенциал Ньютона*, определяемый уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.1.58}$$

Поскольку $\overset{2}{g}_{00}$ исчезает на бесконечности то решение уравнения (9.1.58) имеет вид

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int d^3x' \frac{\overset{0}{T}{}^{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{9.1.59}$$

Из (9.1.56) можно найти исчезающее на бесконечности решение для $\overset{2}{g}_{ij}$:

$$\overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij}\phi \tag{9.1.60}$$

Но $\overset{3}{g}_{i0}$ можно рассматривать и как новый векторный потенциал ζ:

$$\overset{3}{g}_{i0} \equiv \zeta_i. \tag{9.1.61}$$

Поэтому исчезающее на бесконечности решение (9.1.55) запишется так:

$$\zeta_i(\mathbf{x}, t) = -4G \int \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'. \tag{9.1.62}$$

И наконец, используя (9.1.57), (9.1.58) и тождество

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \equiv \frac{1}{2}\nabla^2\phi^2 - \phi\nabla^2\phi,$$

можно упростить (9.1.54), сведя его к следующему выражению:

$$\overset{4}{g}_{00} = -2\phi^2 - 2\psi, \tag{9.1.63}$$

где ψ — еще один потенциал:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 4\pi G\,[\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii}]. \tag{9.1.64}$$

Поскольку $\overset{4}{g}_{00}$ должно обращаться в нуль на бесконечности решение уравнения (9.1.64) имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = -\int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} + G\overset{2}{T}{}^{00}(\mathbf{x}', t) + G\overset{2}{T}{}^{ii}(\mathbf{x}', t)\right]. \tag{9.1.65}$$

Координатное условие (9.1.35) налагает на φ и ζ следующую связь:

$$4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\zeta = 0, \tag{9.1.66}$$

координатное же условие (9.1.36) выполняется теперь автоматически. В § 3 этой главы мы увидим, что благодаря законам сохранения, которым подчиняется $T^{\mu\nu}$, уравнение (9.1.66) также удовлетворяется нашими решениями.

Подставляя (9.1.57), (9.1.60), (9.1.61) и (9.1.63) в (9.1.16) — (9.1.22), получаем следующие выражения для нужных нам компонент аффинной связности:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{00} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,, \tag{9.1.67}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^i{}_{00} = \frac{\partial}{\partial x^i}(2\phi^2 + \psi) + \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}\,, \tag{9.1.68}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^i{}_{0j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}\right) - \delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial t}\,, \tag{9.1.69}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{jk} = -\delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \delta_{ik}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \delta_{jk}\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,, \tag{9.1.70}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^0{}_{00} = \frac{\partial \phi}{\partial t}\,, \tag{9.1.71}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^0{}_{0i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{9.1.72}$$

В качестве премии мы можем вычислить еще и три дополнительных члена в аффинной связности, играющих роль в постньютоновской гидродинамике:

$$\overset{3}{\Gamma}{}^0{}_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}\right) - \delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial t}\,, \tag{9.1.73}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^0{}_{i0} = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\,, \tag{9.1.74}$$

$$\overset{5}{\Gamma}{}^0{}_{00} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\phi. \tag{9.1.75}$$

§ 2. Динамика частицы и фотона

Прежде чем продолжить вычисление постньютоновской метрики, обратимся вновь к задаче, с которой мы начинали, а именно к вычислению ускорения свободно падающей частицы до членов порядка $\bar{v}^4/\bar{r}$. (Подробности применения постньютоновского приближения будут даны в § 5—9 этой главы.) Подставляя компоненты аффинной связности (9.1.67) — (9.1.72) в (9.1.2), получаем непосредственно уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \\ + \mathbf{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta}) + 3\mathbf{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi - \mathbf{v}^2\nabla\phi, \tag{9.2.1}$$

где $v^i \equiv dx^i/dt$.

Кроме этого, нам необходимо знать, как время t в гармонических координатах связано с собственным временем τ, измеряемым для тела, свободно падающего со скоростью $\mathbf{v}$. По определению