понент аффинной связности:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}}\,, \tag{9.1.67}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}=\frac{\partial}{\partial x^{i}}\,(2\phi^{2}+\psi)+\frac{\partial\zeta_{i}}{\partial t}\,, \tag{9.1.68}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{i}{}_{0j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta_{i}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial\zeta_{j}}{\partial x^{i}}\right)-\delta_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial t}\,, \tag{9.1.69}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk}=-\delta_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^{k}}-\delta_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^{j}}+\delta_{jk}\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}}\,, \tag{9.1.70}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}=\frac{\partial\phi}{\partial t}\,, \tag{9.1.71}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{0i}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}} \tag{9.1.72}$$

В качестве премии мы можем вычислить еще и три дополнительных члена в аффинной связности, играющих роль в постньютоновской гидродинамике:

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{ij}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta_{i}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial\zeta_{j}}{\partial x^{i}}\right)-\delta_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial t}\,, \tag{9.1.73}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{0}{}_{i0}=\frac{\partial\psi}{\partial x^{i}}\,, \tag{9.1.74}$$

$$\overset{5}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}=\frac{\partial\psi}{\partial t}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{9.1.75}$$

§ 2. Динамика частицы и фотона

Прежде чем продолжить вычисление постньютоновской метрики, обратимся вновь к задаче, с которой мы начинали, а именно к вычислению ускорения свободно падающей частицы до членов порядка $\overline{v}^{4}/\overline{r}$. (Подробности применения постньютоновского приближения будут даны в § 5—9 этой главы.) Подставляя компоненты аффинной связности (9.1.67) — (9.1.72) в (9.1.2), получаем непосредственно уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\boldsymbol{\nabla}(\phi+2\phi^{2}+\psi)-\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial t}+$$
$$+\mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\zeta})+3\mathbf{v}\frac{\partial\phi}{\partial t}+4\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\phi-\mathbf{v}^{2}\boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{9.2.1}$$

где $v^{i}\equiv dx^{i}/dt$.

Кроме этого, нам необходимо знать, как время t в гармонических координатах связано с собственным временем τ, измеряемым для тела, свободно падающего со скоростью $\mathbf{v}$. По определению

имеем

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -g_{00} - 2g_{i0}v^i - g_{ij}v^iv^j.$$

С учетом членов порядка $\bar{v}^4$ это приводит к выражению

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - [\mathbf{v}^2 + \overset{2}{g}_{00}] - [\overset{4}{g}_{00} + 2\overset{3}{g}_{i0}v^i + \overset{2}{g}_{ij}v^iv^j],$$

или, используя (9.1.57), (9.1.60), (9.1.61) и (9.1.63), получаем

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 + [2\phi - \mathbf{v}^2] + 2[\phi^2 + \psi - \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{v} + \phi\mathbf{v}^2].$$

Слагаемые, заключенные в скобки, имеют порядок $\bar{v}^2$ и $\bar{v}^4$. Используя степенное разложение корня $\sqrt{1+x}$, находим, что с учетом членов порядка $\bar{v}^4$ справедливо следующее выражение:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \phi - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{1}{8}(2\phi - \mathbf{v}^2)^2 + \phi^2 + \psi - \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{v} + \phi\mathbf{v}^2,$$

которое можно переписать так:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - L, \tag{9.2.2}$$

где

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \phi - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{3}{2}\phi\mathbf{v}^2 + \frac{1}{8}(\mathbf{v}^2)^2 - \psi + \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{v}. \tag{9.2.3}$$

Поскольку величина $\int (d\tau/dt)\,dt$ стационарна, величину L можно рассматривать как *лагранжиан* одной частицы и вывести уравнения движения, исходя из известного уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}. \tag{9.2.4}$$

(Производную d/dt при действии на ϕ или $\boldsymbol{\zeta}$ следует брать в виде $\partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$.) Читатель может легко проверить, что уравнение Лагранжа (9.2.4) согласуется с уравнением (9.2.1).

Постньютоновские поля можно также использовать для вычисления ускорения фотона в гравитационном поле до членов порядка $\bar{v}^2$. (Здесь $\bar{v}$ — конечно, не скорость фотона, а обычная скорость частиц с отличной от нуля массой, из которых состоит система.) Поскольку скорость фотона $u_i \equiv dx^i/dt$ равна единице, уравнение (9.1.2) приводит к следующему выражению для ускорения:

$$\frac{du_i}{dt} = -\overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{00} - \overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{jk}u_ju_k + 2u_i\overset{2}{\Gamma}{}^0{}_{0j}u_j + O(\bar{v}^3).$$

Используя (9.1.67), (9.1.70) и (9.1.72), получаем

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -(1 + \mathbf{u}^2)\boldsymbol{\nabla}\phi + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi) + O(\bar{v}^3).$$

Заметим, что скорость фотона задается условием

$$0 = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 1 - \mathbf{u}^2 + 2(1+\mathbf{u}^2)\dot{\phi} + O(\bar{v}^3)$$

или

$$|\mathbf{u}| = 1 + 2\phi + O(\bar{v}^3). \tag{9.2.5}$$

Следовательно, при требуемой точности в формуле для ускорения фотона можно $\mathbf{u}^2$ заменить единицей. Тогда

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\nabla\phi + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\nabla\phi) + O(v^3). \tag{9.2.6}$$

Несколько удобнее записать это выражение в виде уравнения для единичного вектора $\hat{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \hat{\mathbf{u}}\times(\hat{\mathbf{u}}\times\nabla\phi) + O(\bar{v}^3). \tag{9.2.7}$$

§ 3. Тензор энергии-импульса

Чтобы завершить программу вычислений, намеченную в § 1 этой главы, покажем, как можно вычислить тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, который служит в качестве источника гравитационного поля. Посмотрим сперва, как проявляются в постньютоновском приближении законы сохранения энергии и импульса. Законы сохранения в общем виде записываются так: $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Более подробная запись левой части при этом имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu\nu} = -\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu}. \tag{9.3.1}$$

Так как все Γ имеют по крайней мере порядок $\bar{v}^2/\bar{r}$, член порядка $M\bar{v}/\bar{r}^4$ с $\nu = 0$ дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{0}{T}{}^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i}\overset{1}{T}{}^{i0} = 0. \tag{9.3.2}$$

Это выражение можно рассматривать как закон сохранения *массы*; для нас не будет неожиданностью сохранение массы в постньютоновском приближении, так как большая скорость превращения массы в энергию создавала бы температуры, при которых частицы системы двигались бы релятивистски, в противоречии с исходным условием $\bar{v} \ll 1$. Уравнение (9.3.2) важно не только само по себе; оно нам необходимо для согласованности с условиями гармоничности координат. Из (9.1.53) и (9.1.55) мы видим, что уравнение (9.3.2) требует

$$\nabla^2\left(-2\frac{\partial^2\overset{2}{g}{}_{00}}{\partial t} + \frac{\partial\overset{3}{g}{}_{0i}}{\partial x^i}\right) = \nabla^2\left(4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\zeta\right) = 0.$$