Заметим, что скорость фотона задается условием

$$0 = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 1 - \mathbf{u}^2 + 2(1+\mathbf{u}^2)\dot{\phi} + O(\bar{v}^3)$$

или

$$|\mathbf{u}| = 1 + 2\phi + O(\bar{v}^3). \tag{9.2.5}$$

Следовательно, при требуемой точности в формуле для ускорения фотона можно $\mathbf{u}^2$ заменить единицей. Тогда

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\nabla\phi + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\nabla\phi) + O(v^3). \tag{9.2.6}$$

Несколько удобнее записать это выражение в виде уравнения для единичного вектора $\hat{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \hat{\mathbf{u}}\times(\hat{\mathbf{u}}\times\nabla\phi) + O(\bar{v}^3). \tag{9.2.7}$$

§ 3. Тензор энергии-импульса

Чтобы завершить программу вычислений, намеченную в § 1 этой главы, покажем, как можно вычислить тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, который служит в качестве источника гравитационного поля. Посмотрим сперва, как проявляются в постньютоновском приближении законы сохранения энергии и импульса. Законы сохранения в общем виде записываются так: $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Более подробная запись левой части при этом имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu\nu} = -\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu}. \tag{9.3.1}$$

Так как все Γ имеют по крайней мере порядок $\bar{v}^2/\bar{r}$, член порядка $M\bar{v}/\bar{r}^4$ с $\nu = 0$ дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{0}{T}{}^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i}\overset{1}{T}{}^{i0} = 0. \tag{9.3.2}$$

Это выражение можно рассматривать как закон сохранения *массы*; для нас не будет неожиданностью сохранение массы в постньютоновском приближении, так как большая скорость превращения массы в энергию создавала бы температуры, при которых частицы системы двигались бы релятивистски, в противоречии с исходным условием $\bar{v} \ll 1$. Уравнение (9.3.2) важно не только само по себе; оно нам необходимо для согласованности с условиями гармоничности координат. Из (9.1.53) и (9.1.55) мы видим, что уравнение (9.3.2) требует

$$\nabla^2\left(-2\frac{\partial^2\overset{2}{g}{}_{00}}{\partial t} + \frac{\partial\overset{3}{g}{}_{0i}}{\partial x^i}\right) = \nabla^2\left(4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\zeta\right) = 0.$$

Поскольку ψ и $\boldsymbol{\zeta}$ на бесконечности исчезают, можно сделать вывод, что

$$4\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}=0,$$

подтвердив, таким образом, координатное условие (9.1.66).

Возвращаясь к уравнению (9.3.1), находим, что при $\nu=i$ члены порядка $M\bar{v}^2/\bar{r}^4$ приводят к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{1}{T}{}^{0i}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{2}{T}{}^{ij}=-\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00}\overset{0}{T}{}^{00}.$$

Используя (9.1.67), запишем это так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{1}{T}{}^{0i}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{2}{T}{}^{ij}=-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\overset{0}{T}{}^{00}. \qquad (9.3.3)$$

Так как T^{ij} есть поток импульса, то формула (9.3.3) выражает закон сохранения импульса. Отметим, что правая часть (9.3.3) есть как раз плотность ньютоновской гравитационной силы, равная плотности массы $\overset{0}{T}{}^{00}$, умноженной на $-\nabla\phi$.

Нет других законов сохранения, которые содержали бы *только* те компоненты $T^{\mu\nu}$, которые необходимы для вычисления полей в постньютоновском приближении, т. е. только компоненты $\overset{0}{T}{}^{00}$, $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{1}{T}{}^{i0}$ и $\overset{2}{T}{}^{ij}$. Заметим, кроме того, что $g_{\mu\nu}$ входит в оба закона сохранения (9.3.2) и (9.3.3) только через ϕ, которое можно вычислить в ньютоновском приближении. Процедура, таким образом, будет существенно *итерационной*. Мы должны будем сперва решить ньютоновские уравнения движения; затем использовать это решение (в добавление к уравнениям состояния) для того, чтобы определить компоненты $\overset{0}{T}{}^{00}$, $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{1}{T}{}^{i0}$ и $\overset{2}{T}{}^{ij}$; затем вычислить постньютоновские поля ψ и $\boldsymbol{\zeta}$, а после этого вновь рассчитать движение частиц, и так далее. Можно показать [1], что эта процедура справедлива в любом порядке, т. е. чтобы вычислить поля в N-м приближении, необходимо знать компоненты тензора $T^{\mu\nu}$, которые удовлетворяли бы законам сохранения и содержали поля, вычисленные только в $(N-1)$-м приближении. Для нас здесь будет достаточным написать законы сохранения, которым подчинялись бы компоненты $T^{\mu\nu}$ более высокого порядка, чем те, что появляются в (9.3.2) и (9.3.3). В выражении (9.3.1) при $\nu=0$ член порядка $M\bar{v}^3/\bar{r}^4$ и при $\nu=i$ член порядка $M\bar{v}^4/\bar{r}^4$ имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{2}{T}{}^{00}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{3}{T}{}^{i0}=-(2\overset{3}{\Gamma}{}^{0}_{00}+\overset{3}{\Gamma}{}^{i}_{i0})\overset{0}{T}{}^{00}-(3\overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{0i}+\overset{2}{\Gamma}{}^{j}_{ji})\overset{1}{T}{}^{0i},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{3}{T}{}^{i0}+\frac{\partial}{\partial x^j}\overset{4}{T}{}^{ij}=-\overset{4}{\Gamma}{}^i_{00}\overset{0}{T}{}^{00}-\overset{2}{\Gamma}{}^i_{00}\overset{2}{T}{}^{00}-$$

$$-(2\overset{3}{\Gamma}{}^i_{0j}+\delta_{ij}\overset{3}{\Gamma}{}^0_{00}+\delta_{ij}\overset{3}{\Gamma}{}^k_{0k})\overset{1}{T}{}^{0j}-(\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}+\overset{2}{\Gamma}{}^0_{0j}\delta_{ik}+\overset{2}{\Gamma}{}^l_{lj}\delta_{ik})\overset{2}{T}{}^{jk}.$$

Используя (9.1.67) — (9.1.72), это можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{2}{T}{}^{00}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{3}{T}{}^{i0}=\overset{0}{T}{}^{00}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{9.3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{3}{T}{}^{0i}+\frac{\partial}{\partial x^j}\overset{4}{T}{}^{ij}=-\overset{0}{T}{}^{00}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(2\phi^2+\psi)+\frac{\partial\zeta_i}{\partial t}\right]-$$

$$-\overset{2}{T}{}^{00}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}-\overset{1}{T}{}^{0j}\left[\frac{\partial\zeta_i}{\partial x^j}-\frac{\partial\zeta_j}{\partial x^i}-4\delta_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]-$$

$$-\overset{2}{T}{}^{jk}\left[\delta_{jk}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}-4\delta_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right]. \tag{9.3.5}$$

Как мы и ожидали, компоненты источника $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{3}{T}{}^{i0}$ и $\overset{4}{T}{}^{ij}$, необходимые для вычисления *пост*-постньютоновских полей, подчиняются законам сохранения, содержащим метрику только в постньютоновском порядке.

Для вычисления тензора энергии-импульса нам, конечно, необходима модель. Простейшей такой моделью является совокупность свободно падающих частиц с гравитационным или контактным взаимодействием. Из выражения (5.3.5) имеем

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x},t)=g^{-1/2}(\mathbf{x},t)\sum_n m_n\times$$

$$\times\frac{dx_n^\mu(t)}{dt}\frac{\partial x_n^\nu(t)}{\partial t}\left(\frac{d\tau_n}{dt}\right)^{-1}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)), \tag{9.3.6}$$

где m_n, $x_n^\mu(t)$ и τ_n — масса, пространственно-временная координата и собственное время n-й частицы соответственно, а $-g$ есть детерминант $g_{\mu\nu}$. Элементарные вычисления, использующие (4.7.5), дают

$$g=1+\overset{2}{g}+\overset{4}{g}+\ldots,$$

где $\overset{N}{g}$ имеет порядок $\bar{v}^N$ и, в частности,

$$\overset{2}{g}=\eta^{\mu\nu}\overset{2}{g}_{\mu\nu}=-\overset{2}{g}_{00}+\overset{2}{g}_{ii}=-4\phi. \tag{9.3.7}$$

Подставляя (9.3.7) и (9.2.3) в (9.3.6), находим, что

$$\overset{0}{T}{}^{00} = \sum_n m_n \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.8}$$

$$\overset{2}{T}{}^{00} = \sum_n m_n \left(\phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}_n{}^2 \right) \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.9}$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = \sum_n m_n v_n{}^i \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.10}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ij} = \sum_n m_n v_n{}^i v_n{}^j \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.11}$$

где $\mathbf{v}_n \equiv d\mathbf{x}_n/dt$. Чтобы ввести законы сохранения, необходимо вспомнить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n (t)) = v_n{}^i \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n (t)) = - \mathbf{v}_n \cdot \nabla \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n (t));$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{0}{T}{}^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{1}{T}{}^{i0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{1}{T}{}^{0i} + \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{2}{T}{}^{ij} = \sum_n m_n \frac{dv_n{}^i}{dt} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n).$$

Мы видим, что если закон сохранения массы (9.3.2) удовлетворяется автоматически, то закон сохранения импульса (9.3.3) выполняется в том и только в том случае, если каждая частица подчиняется ньютоновскому уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = - \nabla \phi (x_n). \tag{9.3.12}$$

Таким образом, расчет движения совокупности гравитационно взаимодействующих точечных частиц должен проводиться по следующей программе:

А. Решить ньютоновскую задачу, т. е. решить уравнения (9.3.12) и (9.1.58) для $\mathbf{x}_n (t)$ и $\phi (x)$. (Это единственный шаг, который не всегда выполняется путем прямого вычисления.)

Б. Использовать результаты А и уравнения (9.3.8) — (9.3.11) для вычисления компонент $\overset{0}{T}{}^{00}$, $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{1}{T}{}^{i0}$, $\overset{2}{T}{}^{ij}$ тензора энергии-импульса.

В. Использовать результаты А, Б и уравнения (9.1.62), (9.1.65) и вычислить постньютоновские поля ζ и ψ.

Г. Применить результаты А, В и уравнение (9.2.1) для вычисления постньютоновских поправок к траекториям $\mathbf{x}_n (t)$.

Д. Повторить ту же процедуру с новыми решениями и т. д