§ 4. Мультипольные поля

В качестве первого примера вычислим гравитационное поле на больших расстояниях от создающего его источника — произвольного конечного распределения энергии и импульса. Пусть $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ исчезает при $r > R$, где $r \equiv |\mathbf{x}|$. Знаменатель $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ в выражениях (9.1.59), (9.1.62) и (9.1.65) можно разложить по обратным степеням величины r/R:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} \to \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{r^3} + \ldots . \tag{9.4.1}$$

Тогда можно показать, что

$$\phi \to -\frac{G\overset{0}{M}}{r} - \frac{G\mathbf{x}\cdot\overset{0}{\mathbf{D}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{9.4.2}$$

$$\zeta_i \to -\frac{4G\overset{1}{P}_i}{r} - \frac{2Gx^j\overset{1}{J}_{ij}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{9.4.3}$$

$$\psi \to -\frac{G\overset{2}{M}}{r} - \frac{G\mathbf{x}\cdot\overset{2}{\mathbf{D}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{9.4.4}$$

где

$$\overset{0}{M} \equiv \int \overset{0}{T}{}^{00}\, d^3x, \tag{9.4.5}$$

$$\overset{0}{\mathbf{D}} \equiv \int \mathbf{x}\overset{0}{T}{}^{00}\, d^3x, \tag{9.4.6}$$

$$\overset{1}{P}{}^i \equiv \int \overset{1}{T}{}^{i0}\, d^3x, \tag{9.4.7}$$

$$\overset{1}{J}_{ij} \equiv 2\int x^i\overset{1}{T}{}^{j0}\, d^3x, \tag{9.4.8}$$

$$\overset{2}{M} \equiv \int (\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii})\, d^3x, \tag{9.4.9}$$

$$\overset{2}{\mathbf{D}} \equiv \int \mathbf{x}\left(\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii} + \frac{1}{4\pi G}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) d^3x. \tag{9.4.10}$$

[Член $\partial^2\phi/\partial t^2$ не дает вклада в $\overset{2}{M}$, поскольку он равен $-{}^1/_4\nabla\cdot(\partial\zeta/\partial t)$ и, следовательно, исчезает при интегрировании.]

Поле ψ проявляется физически только за счет присутствия его в разложении g_{00}:

$$g_{00} = -1 - 2\phi - 2\psi - 2\phi^2 + O(\overline{v}^6).$$

Очевидно, что поле ψ можно учесть, просто заменяя везде ϕ на $\psi + \phi$. Иначе говоря, оставаясь в рамках точности, требуемой постньютоновским приближением, можно написать

$$g_{00} = -1 - 2(\phi + \psi) - 2(\phi + \psi)^2 + O(\bar{v}^6). \qquad (9.4.11)$$

Выражения (9.4.2) и (9.4.4) позволяют представить имеющее физический смысл поле $\phi + \psi$ в виде

$$\phi + \psi \to -\frac{GM}{r} - \frac{G\mathbf{x}\cdot\mathbf{D}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \qquad (9.4.12)$$

где

$$M \equiv \overset{0}{M} + \overset{2}{M}, \qquad \mathbf{D} \equiv \overset{0}{\mathbf{D}} + \overset{2}{\mathbf{D}}. \qquad (9.4.13)$$

Поскольку величина $\mathbf{D}$ не описывает важного физического явления, а скорее есть просто смещение всего поля, выражение (9.4.12) можно переписать в виде

$$\phi + \psi \to -\frac{GM}{|\mathbf{x} - \mathbf{D}/M|} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \qquad (9.4.14)$$

Мы можем исключить член с $\mathbf{D}$, определяя систему координат как систему центра энергии. В отличие от члена с $\mathbf{D}$, члены порядка $1/r$ и $1/r^2$ в разложении (9.4.3) величины ζ представляют большой физический интерес.

Выведем ряд полезных свойств моментов от тензора $T^{\mu\nu}$, используя сохранение энергии и импульса. Из уравнения сохранения массы (9.3.2) следует, что в общем случае справедливы уравнения

$$\frac{d\overset{0}{M}}{dt} = 0, \qquad (9.4.15)$$

$$\frac{d\overset{0}{\mathbf{D}}}{dt} = \overset{1}{\mathbf{P}}. \qquad (9.4.16)$$

Если тензор энергии-импульса не зависит от времени, то (9.3.2) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \overset{1}{T}{}^{i0} = 0,$$

и, следовательно, интегрируя по частям, мы получим

$$0 = \int x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \overset{1}{T}{}^{j0}\, d^3x = -\overset{1}{P}{}^i, \qquad (9.4.17)$$

$$0 = 2\int x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^k} \overset{1}{T}{}^{k0}\, d^3x = -\overset{1}{J}_{ij} - \overset{1}{J}_{ji}. \qquad (9.4.18)$$

Тот факт, что у статической системы $\overset{1}{\mathbf{P}} = 0$, едва ли удивителен. Антисимметричность же $\overset{1}{J}_{ij}$ не столь очевидна. Запишем $\overset{1}{J}_{ij}$ в виде

$$\overset{1}{J}_{ij} = \varepsilon_{ijk} \overset{1}{J}_k, \qquad (9.4.19)$$

где $\overset{1}{J}_k$ — вектор углового момента:

$$\overset{1}{J}_k \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\overset{1}{J}_{ij} = \int d^3x\varepsilon_{ijk}x^i\overset{1}{T}{}^{j0}. \tag{9.4.20}$$

Подставляя (9.4.17) и (9.4.19) в (9.4.3), получаем

$$\zeta \to \frac{2G}{r^3}(\mathbf{x}\times\mathbf{J}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{9.4.21}$$

Наши результаты (9.4.14) и (9.4.21) для $\phi + \psi$ и ζ, вообще говоря, установлены только вдали от притягивающей массы. Однако они также справедливы вплоть до поверхности сферического распределения энергии и импульса. Допустим сперва, что $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ зависит от положения $\mathbf{x}$ только через радиус $r \equiv |\mathbf{x}|$. Тогда в выражениях (9.1.59), (9.1.62) и (9.1.65) множитель $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}$ можно усреднить по углам. Для $r > r'$ имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\Omega}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{[r^2-2rr'\cos\theta+r'^2]^{1/2}} = \frac{1}{r}.$$

Следовательно, *везде* вне сферы

$$\phi = -\frac{G\overset{0}{M}}{r}, \tag{9.4.22}$$

$$\zeta = -4G\frac{\overset{1}{\mathbf{P}}}{r}, \tag{9.4.23}$$

$$\psi = -\frac{G\overset{2}{M}}{r}. \tag{9.4.24}$$

Если сфера покоится, то $\overset{1}{\mathbf{P}} = 0$; в этом случае (9.1.57), (9.1.60), (9.1.61), (9.1.63) и (9.4.13) приводят к следующей метрике:

$$g_{00} \approx -1 + \frac{2MG}{r} - \frac{2M^2G^2}{r^2}, \tag{9.4.25}$$

$$g_{i0} \approx 0, \tag{9.4.26}$$

$$g_{ij} \approx \delta_{ij} + 2\delta_{ij}\frac{MG}{r}. \tag{9.4.27}$$

Этот результат согласуется с точным решением Шварцшильда, задаваемым в гармонических координатах выражением (8.2.15):

$$g_{00} = -\frac{1-MG/r}{1+MG/r},$$

$$g_{i0} = 0,$$

$$g_{ij} = \left(1+\frac{MG}{r}\right)^2\delta_{ij} + \left(\frac{MG}{r}\right)^2\frac{1+MG/r}{1-MG/r}\left(\frac{x^ix^j}{r^2}\right).$$

Однако в этих двух выводах есть существенное различие, а именно: в то время как точное решение Шварцшильда, найденное в § 2 гл. 7, справедливо для статической сферически-симметричной системы, постньютоновское решение применимо к системе, изменяющейся за время порядка $\bar{r}/\bar{v}$. В § 7 гл. 11 будет показано, что в действительности решение Шварцшильда справедливо вне любой сферически-симметричной системы, как статической, так и нестатической.

Рассмотрим теперь сферически-симметричную систему, которая не перемещается, но вращается с угловой частотой $\omega(r)$. Плотность импульса записывается в этом случае так:

$$\overset{1}{T}{}^{i0}(\mathbf{x}', t) = \overset{0}{T}{}^{00}(r')\,[\omega(r') \times \mathbf{x}']_i. \tag{9.4.28}$$

Тогда уравнение (9.1.62) задает поле ζ следующим образом:

$$\zeta(\mathbf{x}) = -4G \int \frac{[\omega(r') \times \mathbf{x}']}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\,\overset{0}{T}{}^{00}(r')\,d^4x'. \tag{9.4.29}$$

Интеграл по телесному углу

$$\int \frac{d\Omega'\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \begin{cases} \left(\dfrac{4\pi r'^2}{3r^3}\right)\mathbf{x} & \text{для } r' < r, \qquad (9.4.30) \\ \left(\dfrac{4\pi}{3r'}\right)\mathbf{x} & \text{для } r' > r. \qquad (9.4.31) \end{cases}$$

Таким образом, поле вне сферы имеет вид

$$\zeta(\mathbf{x}) = \frac{16\pi G}{3r^3}\left[\mathbf{x} \times \int \omega(r')\,\overset{0}{T}{}^{00}(r')\,r'^4\,dr'\right]. \tag{9.4.32}$$

Интеграл можно выразить через угловой момент, определяемый с помощью (9.4.20) и (9.4.28), следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \int (\mathbf{x}' \times [\omega(r') \times \mathbf{x}'])\,\overset{0}{T}{}^{00}(r')\,d^4x' = \\ &= \int [r'^2\omega(r') - \mathbf{x}'(\mathbf{x}' \cdot \omega(r'))]\,\overset{0}{T}{}^{00}(r')\,d^3x' = \\ &= \frac{8\pi}{3}\int \omega(r')\,\overset{0}{T}{}^{00}(r')\,r'^4\,dr'. \end{aligned} \tag{9.4.33}$$

Итак, выражение (9.4.32) везде вне сферы равно

$$\zeta(\mathbf{x}) = \frac{2G}{r^3}(\mathbf{x} \times \mathbf{J}), \tag{9.4.34}$$

что согласуется с общей асимптотической формулой (9.4.21). Поле *внутри* полой вращающейся сферы задается выражениями (9.4.29) и (9.4.31) в виде

$$\zeta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{\Omega}, \tag{9.4.35}$$

где

$$\mathbf{\Omega} \equiv \frac{16\pi G}{3}\int \omega(r')\,\overset{0}{T}{}^{00}(r')\,r'\,dr'. \tag{9.4.36}$$

В § 7 гл. 9 мы обсудим связь этого результата с принципом Маха.