

§ 5. Прецессия перигелия

Мы увидим сейчас, как постньютоновский формализм, развитый в последних четырех параграфах, можно использовать для вычисления прецессии планетарных орбит в реальной Солнечной системе, т. е. с учетом существования других планет, вращения Солнца, его несферичности и т. д. В потенциале $\phi + \psi$, определяющем g_{00} [см. выражение (9.4.11)], подавляющее большую часть составляет сферически-симметричный вклад от Солнца $-GM_{\odot}/r$ и поэтому потенциал $\phi + \psi$ удобно записать в виде

$$\phi + \psi = -\frac{GM_{\odot}}{r} + \varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad (9.5.1)$$

причем функция ε включает в себя не только ньютоновские потенциалы других планет, но также любой квадрупольный момент или даже моменты более высоких порядков от вклада Солнца в потенциал $\phi + \psi$. Теперь уравнение движения (9.2.1) точечной частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM_{\odot}\mathbf{x}}{r^3} + \eta + O(v^6), \quad (9.5.2)$$

где η — малое возмущение:

$$\begin{aligned} \eta = & -\nabla(\varepsilon + 2\phi^2) - \frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \xi) + \\ & + 3\mathbf{v} \frac{\partial\phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi - \mathbf{v}^2 \nabla\phi. \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

В дальнейшем наиболее удобный метод вычисления прецессии перигелия будет связан с оценкой скорости изменения вектора Рунге — Ленца¹⁾

$$\mathbf{A} = -M_{\odot}G \frac{\mathbf{x}}{r} + (\mathbf{v} \times \mathbf{h}). \quad (9.5.4)$$

Здесь $r = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, \mathbf{h} — орбитальный угловой момент, приходящийся на единицу массы:

$$\mathbf{h} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{v}. \quad (9.5.5)$$

Если в уравнении (9.5.2) возмущение η отсутствует, то орбиты будут эллиптическими и будут задаваться обычными формулами:

$$r = \frac{L}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (9.5.6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{LM_{\odot}G}}{r^2}, \quad (9.5.7)$$

$$\frac{dr}{dt} = e \sqrt{\frac{M_{\odot}G}{L}} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad (9.5.8)$$

¹⁾ Этот вектор введен еще Лапласом и его правильнее называть вектором Лапласа. — Прим. ред.

где e — эксцентриситет, а L — фокальный параметр (§ 6 гл. 8). Мы рассматриваем орбиты, лежащие в плоскости $\theta = \pi/2$, с перигелием при значении азимутального угла $\varphi = \varphi_0$. Тогда \mathbf{h} будет постоянным, нормальным к орбите вектором, величина которого равна

$$|\mathbf{h}| = \sqrt{LM_{\odot}G}, \quad (9.5.9)$$

а \mathbf{A} — постоянный, направленный к *перигелию* вектор, величина которого равна

$$|\mathbf{A}| = eM_{\odot}G. \quad (9.5.10)$$

Следовательно, скорость прецессии перигелия $d\varphi_0/dt$, вызванной любым возмущением, есть как раз составляющая изменения $d\hat{\mathbf{A}}/dt$ единичного вектора $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ вдоль направления, перпендикулярного как \mathbf{A} , так и \mathbf{h} , т. е.

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = (\mathbf{h} \times \mathbf{A}) \cdot \frac{d\mathbf{A}/dt}{|\mathbf{h}| |\mathbf{A}|^2}. \quad (9.5.11)$$

(Если $d\varphi_0/dt$ — положительная величина, то прецессия происходит в том же самом направлении, что и движение планеты.) Непосредственным вычислением можно показать, что скорость изменения \mathbf{A} , порожденного возмущением $\boldsymbol{\eta}$ в (9.5.2), равна

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{h} + \mathbf{v} \times (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\eta}). \quad (9.5.12)$$

Отметим, что $d\mathbf{A}/dt$, а следовательно, и $d\varphi_0/dt$ линейны по $\boldsymbol{\eta}$, и поэтому корректное вычисление $d\varphi_0/dt$ — это суммирование вкладов в прецессию, даваемых каждым малым членом в $\boldsymbol{\eta}$.

Наибольшим членом в $\boldsymbol{\eta}$ является $-\nabla\varepsilon$, возникший от ньютоновских потенциалов других планет. Мы не будем пытаться вычислить этот член. Специалисты утверждают, что он приводит к прецессии $d\varphi_0/dt$, которая для Меркурия составляет около $532''$ за столетие (§ 6 гл. 8). Следующий существенный член, появляющийся из-за релятивистских поправок в (9.5.3), можно получить, приравняв ϕ и ξ значениям, которые они имели бы при сферическом невращающемся Солнце:

$$\phi_{\odot} = -\frac{GM_{\odot}}{r}, \quad \xi_{\odot} = 0. \quad (9.5.13)$$

Тогда выражение (9.5.3) дает

$$\boldsymbol{\eta} = -2\nabla\phi_{\odot}^2 + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi_{\odot} - \mathbf{v}^2\nabla\phi_{\odot}. \quad (9.5.14)$$

Подставив (9.5.12) — (9.5.14) и (9.5.6) — (9.5.10) в (9.5.11), получим следующую формулу для вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} = & 8M_{\odot}GhL^{-3}[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^3 \times \\ & \times \sin^2(\varphi-\varphi_0) - M_{\odot}Ge^{-4}hL^{-3} \times \\ & \times \{7[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2 + 4[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^3 + \\ & + [1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^4\} \cos(\varphi-\varphi_0). \end{aligned} \quad (9.5.15)$$

Поскольку φ_0 меняется медленно, изменение φ_0 за один оборот можно определить, интегрируя $d\varphi_0/dt$ на интервале, равном одному периоду, фиксируя при этом в подынтегральном выражении φ_0 и используя для $d\varphi/dt$ формулы Кеплера (9.5.6) — (9.5.10). Это приводит к следующему выражению для прецессии за один оборот:

$$\Delta\varphi_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{dt} \frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \frac{L^2}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{dt} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^{-2} d\varphi. \quad (9.5.16)$$

Большинство членов исчезает при интегрировании по углам, и оставшиеся члены дают следующее выражение:

$$\Delta\varphi_0 = 6\pi \frac{M_{\odot}G}{L} \quad (9.5.17)$$

в полном согласии с нашим более ранним результатом (8.6.11).

В качестве примера еще одного малого вклада в прецессию оценим действие поля ζ , возникающего из-за вращения Солнца. Согласно (9.4.34),

$$\zeta = \frac{2G}{r^3} (\mathbf{x} \times \mathbf{J}_{\odot}). \quad (9.5.18)$$

Вклад этого поля в ускорение $d\mathbf{v}/dt$ задается с помощью (9.5.3) следующим образом:

$$\eta = \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) = 6Gh(\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}_{\odot}) r^{-5} + 2G(\mathbf{v} \times \mathbf{J}_{\odot}) r^{-3}. \quad (9.5.19)$$

Тогда, согласно формуле (9.5.12), можно утверждать, что это приводит к изменению \mathbf{A} со скоростью, равной

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = & -6Gh(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}_{\odot}) r^{-5} - \\ & -2G(\mathbf{v} \times \mathbf{J}_{\odot})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) r^{-3} - 2G\mathbf{v}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{J}_{\odot}) r^{-3}. \end{aligned} \quad (9.5.20)$$

Проведем для простоты ось вращения Солнца перпендикулярно плоскости планетных орбит — тогда \mathbf{J}_{\odot} будет параллельным \mathbf{h} . Подставляя (9.5.20) и (9.5.6) — (9.5.10) в (9.5.11), получаем следующее выражение для скорости прецессии:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} = & \frac{2J_{\odot}h^2}{M_{\odot}L^4e} \{ -[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 e \sin^2(\varphi - \varphi_0) - \\ & - [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^3 [e + \cos(\varphi - \varphi_0)] \}. \end{aligned} \quad (9.5.21)$$

Тогда (9.5.16) дает следующее выражение для прецессии за один оборот:

$$\Delta\varphi_0 = \frac{-8\pi J_{\odot}h}{M_{\odot}L^2}. \quad (9.5.22)$$

Принято считать, что Солнце имеет угловой момент $J_{\odot} \approx 1,7 \times 10^{48}$ г·см²·с⁻¹, масса его $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{33}$ г. Тогда в наших естественных единицах, в которых 1 с = $3 \cdot 10^{10}$ см, находим

$$\frac{J_{\odot}}{M_{\odot}} \approx 0,28 \text{ км.}$$

Далее, орбита Меркурия имеет $L = 55,3 \cdot 10^6$ км и $h = 9,03 \cdot 10^3$ км, поэтому поле ζ дает в прецессию перигелия Меркурия вклад, равный (в единицах рад/об)

$$\Delta\varphi \approx -2,06 \cdot 10^{-11},$$

или в более удобных единицах (угловая секунда за столетие)

$$\Delta\varphi_0 \approx -17,6 \cdot 10^{-4}.$$

Если даже Дикке и Голденберг правы и Солнце имеет угловой момент, в 25 раз больший, то прецессия, вызванная полем ζ , составляет примерно лишь $0,04''$ за столетие, что слишком мало для того, чтобы быть замеченным.

Полезно еще раз подчеркнуть, что вычисленная полная прецессия должна представлять собой сумму следующих слагаемых: 1) ньютоновский член, равный $532''$ за столетие; 2) эйнштейновский член, задаваемый формулой (9.5.17); 3) член (9.5.22), обусловленный ζ ; 4) пьютоновский член, возникающий из-за точно неизвестной несферичности Солнца; 5) член, появляющийся из-за вклада вращения Солнца в анизотропную часть ψ ; 6) член, обусловленный постニュтоновскими поправками к возмущению, вызываемому другими планетами. При этом только ньютоновские члены и эйнштейновский член (9.5.17) достаточно велики, чтобы их можно было измерить.

§ 6. Прецессия движущегося по орбите гироскопа

В § 1 гл. 5 правило параллельного переноса указывало на то, что спин S_{μ} свободно падающей частицы прецессирует, т. е.

$$\frac{dS_{\mu}}{d\tau} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} S_{\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}. \quad (9.6.1)$$

Несколько лет назад Пью [2] и Шифф [3] предложили поместить гироскоп на околоземную орбиту и исследовать прецессию его вектора спина для выявления тонкой структуры гравитационного поля Земли. Шифф применил метод вычислений, предложенный Папапетроу [4, 5] и Фоком [6], согласно которому сперва рассматривается движение протяженного вращающегося тела, а затем размеры тела устремляются к нулю. Мы вместо этого с самого начала будем считать гироскоп точечной частицей, поскольку